Departamento de Matemática - Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
Complementos de Análise Matemática **Engenharia de Sistemas e Informática**
Enunciado e Resolução da 2ª. Frequência de 2005/2006 (Duração: 2h)

==Enunciado==

Antes de iniciar a resolução da prova leia atentamente todo o enunciado inclusivé os Dados apresentados no fim.

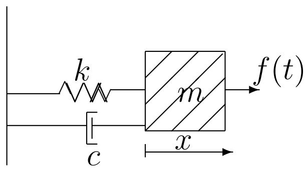
1. Determine a convolução das funções e^{at} e e^{bt} e obtenha a transformada de Laplace dessa convolução.

2. (a) Mostre que se $h(t)$ é uma função seccionalmente contínua e periódica, de período T, que admite transformada de Laplace, então

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} h(t)\, dt.$$

(b) Use o resultado da alínea (a) para mostrar que a transformada de Laplace da onda quadrada $q(t)$, que é uma função periódica de período $T = a$ tal que $q(t) = 1$ para $0 < t < a/2$ e $q(t) = -1$ para $a/2 < t < a$, é $\dfrac{(1-e^{-as/2})^2}{s(1-e^{-as})}$.

3. Na figura um corpo de massa m está ligado a uma corda elástica com constante de elasticidade k e a um amortecedor que resiste ao movimento do corpo com uma força numericamente igual a c vezes a velocidade do movimento. A força externa aplicada é dada por $f(t)$ e o deslocamento do corpo da sua posição de equilíbrio por x. Uma equação diferencial do movimento pode ser escrita na forma



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + (\alpha^2+\beta^2)x = \frac{1}{m} f(t)\,,$$

com

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \alpha = \frac{c}{2m}, \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Assumindo que a massa está inicialmente em repouso na sua posição de equilíbrio, e que nela actua uma força externa constante f_0, determine a expressão do movimento, considerando β como um número real positivo.

4. (a) Desenvolva $\sqrt[3]{1-x}$ em série de potências de x, indicando o raio de convergência da série. Apresente os coeficientes dos termos de ordem 2 e 3 sob a forma de fracção de inteiros.

(b) Desenvolva a função $g(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi]$ em série de cossenos.

(c) Supondo que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é a série obtida na alínea (a) e que $d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(nt)$ é a série obtida na alínea (b), diga, justificando, qual a natureza das séries seguintes, e, em caso de convergência, indique a respectiva soma:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (c_n 2^n + d_n \cos n)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos\frac{n\pi}{4}$.

Dados

1) Série binomial: $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$, onde $\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{n!}$, para $k \in \mathbb{R}$ e $|x|<1$;

2) O desenvolvimento em série de Fourier de uma função $f(t)$ de período T, caso exista, é dado por:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + B_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right),$$

onde

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

e

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \quad \text{para} \quad n \geq 1;$$

3) $\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\dfrac{\cos((a+b)t)}{2(a+b)} - \dfrac{\cos((a-b)t)}{2(a-b)}$, para $|a| \neq |b|$.

Cotação

1.	2.	3.	4.
1.5	2.5	5	7

==

==Resolução==

1. Determinação da convolução de e^{at} e e^{bt}:

$$\begin{aligned}
e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)}\, d\tau \\
&= \int_0^t e^{bt+(a-b)\tau}\, d\tau \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau}\, d\tau \\
&= \begin{cases} e^{bt} \left[\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \right]_0^t, & \text{se } a \neq b \\ e^{bt} t & \text{se } a = b \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{bt} \dfrac{e^{(a-b)t} - 1}{a-b}, & \text{se } a \neq b \\ e^{bt} t & \text{se } a = b \end{cases}
\end{aligned}$$

A convolução de e^{at} e e^{bt} é a função dada pela expressão $e^{bt}\,\dfrac{e^{(a-b)t}-1}{a-b}$, $t \geq 0$, se $a \neq b$, e é a função dada pela expressão $e^{bt}t$, $t \geq 0$, se $a = b$.

Cálculo da transformada de Laplace dessa convolução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at} * e^{bt}\} &= \mathcal{L}\{e^{at}\}\mathcal{L}\{e^{bt}\} \\ &= \tfrac{1}{(s-a)(s-b)} \qquad \text{(usando a Tabela das Transformadas de Laplace).}\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}h(t)\,dt \\ &= \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt \;+\; \int_T^{\infty} e^{-st}h(t)\,dt.\end{aligned}$$

Considerando, para o segundo integral da última soma, a mudança de variável

$$u = t - T$$

obtém-se

$$t = T \Rightarrow u = 0,\; t = \infty \Rightarrow u = \infty \;\text{ e }\; du = dt$$

pelo que obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt + = \int_0^{\infty} e^{-s(u+T)}h(u+T)\,du. \\ &= \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt \;+\; \int_0^{\infty} e^{-su-sT)}h(u)\,du, \;\text{ por } h \text{ ser periódica de período } T, \\ &= \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt \;+\; e^{-sT}\int_0^{\infty} e^{-su}h(u)\,du \\ &= \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt \;+\; \mathcal{L}\{h(t)\}.\end{aligned}$$

Obtemos assim a igualdade

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt \;+\; e^{-sT}\mathcal{L}\{h(t)\}.$$

donde se conclui que

$$\left(1 - e^{-sT}\right)\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}\int_0^{T} e^{-st}h(t)\,dt.$$

(b) Usando o resultado da alínea (a), tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{q(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-sa}}\int_0^a e^{-st}q(t)\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-sa}}\left(\int_0^{a/2} e^{-st}\,dt - \int_{a/2}^{a} e^{-st}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-sa}}\left(\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{a/2} - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{a/2}^{a}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-sa}}\left(\frac{(e^{-sa/2}-1)-(e^{-sa}-e^{-sa/2})}{-s}\right) \\
&= \frac{1}{s(1-e^{-sa})}\left(-e^{-sa/2}+1+e^{-sa}-e^{-sa/2}\right) \\
&= \frac{1}{s(1-e^{-sa})}\left((e^{-sa/2})^2-2e^{-sa/2}+1\right) \\
&= \frac{1}{s(1-e^{-sa})}\left(e^{-sa/2}-1\right)^2 \\
&= \tfrac{(1-e^{-as/2})^2}{s(1-e^{-as})}
\end{aligned}$$

3. Vamos resolver a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)x=\frac{1}{m}f_0$$

sujeita às condições iniciais

$$x(0)=0,\ x'(0)=0$$

$$\mathcal{L}\left\{\tfrac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\tfrac{dx}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)x\right\}=\mathcal{L}\left\{\tfrac{1}{m}f_0\right\}$$

$$\Leftrightarrow (s^2X(s)-sx(0)-x'(0))+2\alpha(sX(s)-x(0))+(\alpha^2+\beta^2)X(s)=\tfrac{f_0}{m}\tfrac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2)X(s)=\tfrac{f_0}{m}\tfrac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\tfrac{f_0}{m}\tfrac{1}{s(s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2)}$$

Então

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{f_0}{m}\frac{1}{s(s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2)}\}.$$

Ora,

$$\frac{1}{s(s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2)}\}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2}.$$

Isto leva-nos à igualdade

$$A(s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2)+(Bs+C)s=1$$

donde se obtêm os seguintes valores para as contantes A, B e C:

$$\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} \\
B &= -\tfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} \\
C &= -\tfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\tfrac{1}{s}-\tfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\tfrac{s+2\alpha}{s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2}\} \\
&= \tfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s}-\tfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}-\tfrac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\} \\
&= \tfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(1+e^{-\alpha t}\cos\beta t-\tfrac{\alpha}{\beta}\,e^{-\alpha t}\sin\beta t\right)
\end{aligned}$$

4. (a) O desenvolvimento de $\sqrt[3]{1-x}$ em série de potências de x é uma série binomial:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-x} &= (1-x)^{1/3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

Este desenvolvimento é válido para $|-x| < 1$, ou seja, $|x| < 1$. Isto é, o raio de convergência é igual a 1.

O coeficiente do termo de ordem 2 é:

$$\begin{aligned} \binom{1/3}{2} (-1)^2 &= \tfrac{1/3(1/3-1)}{2!} \\ &= \tfrac{1/3(-2/3)}{2} \\ &= -\tfrac{1}{3^2} \end{aligned}$$

O coeficiente do termo de ordem 3 é:

$$\begin{aligned} \binom{1/3}{3} (-1)^3 &= -\tfrac{1/3(1/3-1)(1/3-2)}{3!} \\ &= \tfrac{1/3(-2/3)(-5/3)}{6} \\ &= -\tfrac{5}{3^4} \end{aligned}$$

(b) Considere-se a função par de período 2π que no intervalo $[0, \pi]$ coincide com $g(t)$. Neste caso, considerando as fórmulas dadas para os coeficientes de Fourier, temos que $B_n = 0$, para todo o $n \geq 1$, visto a função ser par. Resta calcular os coeficientes A_n.

$$\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \\ &= 2\tfrac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt \\ &= \tfrac{1}{\pi} \left[-\cos t \right]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{\pi} \left(-\cos \pi + \cos 0 \right) \\ &= \tfrac{1}{\pi} (1+1) \\ &= \tfrac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$ (usando o Dado 3)):

$$\begin{aligned} A_n &= \tfrac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos \tfrac{2n\pi t}{2\pi} dt \\ &= 2\tfrac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} g(t) \cos \tfrac{2n\pi t}{2\pi} dt \\ &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos nt \, dt \\ &= \begin{cases} \tfrac{2}{\pi} \left[\tfrac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi}, & \text{se } n = 1 \\ \tfrac{2}{\pi} \left[-\dfrac{\cos((1+n)t)}{2(1+n)} - \dfrac{\cos((1-n)t)}{2(1-n)} \right], & \text{se } n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2\pi - \sin^2 0}{2}\right), & \text{se } n=1 \\ \frac{2}{\pi}\left((-\dfrac{\cos((1+n)\pi)}{2(1+n)} - \dfrac{\cos((1-n)\pi)}{2(1-n)}) - (-\dfrac{\cos((1+n)0)}{2(1+n)} - \dfrac{\cos((1-n)0)}{2(1-n)})\right], & \text{se } n>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } n=1 \\ \frac{2}{\pi}\left((-\dfrac{(-1)^{1+n}}{2(1+n)} - \dfrac{(-1)^{1-n}}{2(1-n)}) - (-\dfrac{1}{2(1+n)} - \dfrac{1}{2(1-n)})\right], & \text{se } n>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } n=1 \\ \frac{1}{\pi}\left(\dfrac{(-1)^n+1}{1+n} + \dfrac{(-1)^n+1}{1-n}\right), & \text{se } n>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } n=1 \\ \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}, & \text{se } n>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Assim o desenvolvimento da função $g(t) = \sin t$ em série de cossenos no intervalo $[0, \pi]$ é

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ par}}}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi(1-n^2)} \cos\frac{2n\pi t}{2\pi}\right)$$

ou seja,

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(1-(2k)^2)}\cos 2kt\right)$$

(c) A série da alínea (a) é convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n 2^n$ é divergente (tem-se $x = 2$).

A série da alínea (b) é convergente para todo o $t \in \mathbb{R}$, sendo convergente para $\sin t$ quando $t \in]0, \pi[$. Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(nt)$ é convergente para todo o t, em particular, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos n$ é convergente (tem-se $t = 1$).

Assim:

(i) Sendo a "soma de uma série divergente com uma convergente", a série apresentada, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n 2^n + d_n \cos n)$, é divergente.

(ii) Pelo exposto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos\frac{n\pi}{4}$ é convergente e converge para $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois trata-se da série $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos n$ com $t = \frac{\pi}{2}$.