

C.A.M.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. Equações diferenciais exactas.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

tal que M e N têm derivadas parciais primeiras contínuas e $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Solução geral: $F(x, y) = C$ tal que $F_x = M$ e $F_y = N$.

2. Equações diferenciais homogêneas.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

tal que M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Solução geral: Transforma-se a equação dada numa equação de variáveis separáveis por meio da substituição $y = xv$ (ou $x = yv$).

3. Equações diferenciais lineares de primeira ordem.

3.1

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

com P e Q funções contínuas.

Para chegar à solução geral: Utiliza-se a solução geral implícita

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + D$$

para chegar à solução explícita.

3.2 Equação de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Para chegar à solução geral: Dividem-se ambos os membros por y^n e utiliza-se a substituição $w = y^{1-n}$ para cair no caso 3.1.

4. Equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

Solução geral: Considera-se a equação auxiliar

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0.$$

1) A cada raiz real α de multiplicidade k da equação auxiliar, correspondem as seguintes soluções da equação diferencial

$$y = e^{\alpha x}, y = x e^{\alpha x}, y = x^2 e^{\alpha x}, \dots, y = x^{k-1} e^{\alpha x}$$

2) A cada par de raízes complexas conjugadas $\alpha \pm \beta i$ de multiplicidade k da equação auxiliar, correspondem as seguintes soluções da equação diferencial

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x, y = x e^{\alpha x} \cos \beta x, y = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x, y = x e^{\alpha x} \sin \beta x, y = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

A solução geral da equação (1) é uma combinação linear das soluções referidas em 1) e 2), visto que estas constituem um sistema fundamental de soluções.

5. Equações diferenciais lineares não homogêneas de coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (2)$$

Solução geral: $y = y_h + y_p$, onde y_h é a solução geral da correspondente equação homogênea e y_p é uma solução particular de (2).

Método dos coeficientes indeterminados para obter a solução particular y_p :

Multiplicam-se ambos os membros de (2) por um operador diferencial linear $P(D)$ que anule $g(x)$. Obtém-se uma equação diferencial linear homogênea

$$P(D)(a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y) = 0 \quad (3)$$

Resolve-se a equação diferencial (3). Como o conjunto de soluções de (2) está contido no conjunto de soluções de (3), obtém-se uma solução particular de (2) a partir da solução geral de (3).

Operadores diferenciais lineares anuladores de algumas funções:

Função	Anulador
$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$	D^n
$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^n$
$y = e^{\alpha x} \cos \beta x, y = x e^{\alpha x} \cos \beta x, y = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y = e^{\alpha x} \sin \beta x, y = x e^{\alpha x} \sin \beta x, y = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$