

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS

Solução geral de um sistema de equações diferenciais da forma

$$X' = AX \quad (1)$$

onde $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ e A é uma matriz real $n \times n$ de entradas constantes:

1. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são valores próprios todos distintos da matriz A e $K_1, K_2, \dots, K_n$ são vectores próprios correspondentes, então a solução geral de (1) é dada por

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t} \quad (2)$$

2. Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ são valores próprios de A e K_1 e K_2 so vectores próprios associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente, então

$$X_1 = (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$$

e

$$X_2 = (B_2 \cos \beta t - B_1 \sin \beta t) e^{\alpha t}$$

onde $B_1 = \frac{1}{2}[K_1 + \overline{K_1}]$ e $B_2 = \frac{i}{2}[K_1 - \overline{K_1}]$,

são duas soluções linearmente independentes.

3. Se λ é um valor próprio de A tal que $\text{m.a.}(\lambda) = \text{m.g.}(\lambda) = m$, corresponde-lhe uma solução da forma

$$c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} + \dots + c_m K_m e^{\lambda t}$$

onde $K_1, K_2, \dots, K_m$ são vectores próprios linearmente independentes associados a λ .

4. Se λ é valor próprio de multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1, sendo K um vector próprio associado a λ ,

$$\begin{aligned} X_1 &= K e^{\lambda t} \\ X_2 &= K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t} \end{aligned}$$

onde

$$(A - \lambda I)P = K,$$

são soluções linearmente independentes de (1).

5. Se λ é valor próprio de multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1, sendo K um vector próprio associado a λ ,

$$\begin{aligned} X_1 &= K e^{\lambda t} \\ X_2 &= K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t} \\ X_3 &= K \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + P t e^{\lambda t} + Q e^{\lambda t} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)P &= K \\ \text{e } (A - \lambda I)Q &= P \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes de (1).