Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
Exame - 13/07/2001

Duração: 2h 30m

1. Seja p a proposição "Conduzes a uma velocidade superior a 110." e q a proposição "Apanhas uma multa de velocidade". Traduza as frases seguintes usando p e q e conectivos lógicos.
   (a) Conduzes a uma velocidade superior a 110 mas não apanhas uma multa de velocidade.
   (b) Se não conduzires a uma velocidade superior a 110, não apanhas uma multa de velocidade.
   (c) Conduzires a uma velocidade superior a 110 é condição necessária para apanhares uma multa de velocidade.

2. Defina contradição e averigue se a fórmula bem formada

$$(p \to \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$$

   é ou não uma contradição.

3. Faça uma demonstração formal de que das premissas $\neg p \to q \wedge r$, $p \to s$, $\neg s$ se deduz q.

4. (a) Suponha que o universo de discurso é o conjunto dos números reais, que $R(x, y)$ significa $xy \neq x$, que $S(x, y)$ significa $xy = 1$ e que $P(x)$ significa x é positivo. Expresse cada uma das afirmações seguintes, usando quantificadores, conectivos lógicos e os predicados R, S e P.
      i. Todo o número real positivo tem inverso.
      ii. Para quaisquer números reais x e y, se $xy = 1$ então $xy \neq 0$.
      iii. Para todo o número real x, se x é invertível então $x \times 2 \neq x$.
   (b) Diga quando é que uma fórmula bem formada do cálculo de predicados se diz válida e quando se diz contraditória.
   (c) Mostre que a fórmula bem formada

$$\forall x(\exists z Q(x, z) \to R(x, y))$$

   não é válida nem contraditória.

5. Para cada uma das alíneas seguintes, diga se o conjunto dado é o conjunto potência de algum conjunto. Em caso afirmativo, indique esse conjunto.
   (a) $\emptyset$
   (b) $\{\emptyset\}$
   (c) $\{\emptyset, \{a\}\}$
   (d) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$
   (e) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

6. Mostre que

   (a) $A \cap (B - A) = \emptyset$ (b) $A \cup (B - A) = A \cup B$

7. (a) Mostre que, para todo o número natural n, se tem que $n^2 + n$ é par.
   (b) Use indução matemática para mostrar que, para todo o número natural n, $n^3 - n$ é divisível por 6.

V.S.F.F.

8. Considere sobre o conjunto $\{0,1,2,3\}$ a relação $R = \{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0)\}$. Indique:

   (a) A matriz de R, considerando 0,1,2,3 ordenados pela ordem natural.

   (b) O fecho reflexivo de R.

   (c) O fecho simétrico de R.

   (d) R^2.

   (e) R^{-1}.

9. (a) Descubra o erro na "demonstração" da seguinte afirmação "Toda a relação R sobre um conjunto A que é simétrica e transitiva, também é reflexiva.":

   Demonstração: Seja $a \in A$. Escolha-se $b \in A$ tal que $(a,b) \in R$. Então, como R é simétrica, $(b,a) \in R$. Mas então usando a transitividade podemos concluir que $(a,a) \in R$.

   (b) Dê um exemplo de uma relação não vazia sobre $\{1,2\}$ que seja simétrica e transitiva, mas não seja reflexiva.

10. (a) Defina recursivamente string sobre um conjunto X.

    (b) Defina recursivamente o conjunto de todas as strings sobre $\{0,1\}$ de comprimento ímpar e cujos caracteres apresentam uma simetria relativamente ao caracter do meio; por exemplo, 0, 010, 11011, 01010, ...

11. Sabendo que a função f é definida recursivamente por

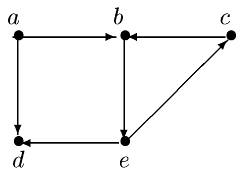
    $f(0) = f(1) = 1$ e $f(n+1) = f(n)f(n-1)$,

    calcule o valor da expressão $(-10)\text{mod}13 + \left[\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\right]\right] + f(3) + f(4)$.

12. Desenhe todos os grafos não dirigidos simples conexos, não isomorfos entre si, de n vértices para

    (i) $n = 2$ (ii) $n = 3$ (iii) $n = 4$

13. Seja G o seguinte digrafo:



    (a) Para cada uma das seguintes sequências de vértices, diga quais as que formam caminhos. De entre estas diga quando se trata de um caminho elementar, um caminho simples, um ciclo elementar ou um ciclo simples.

    (i) $< a,b,e,c >$ (ii) $< a,d,a >$ (iii) $< a,d,b,e,a >$ (iv) $< a,b,e,c,b,e,d >$ (v) $< a,b,e,c,b >$

    (b) Indique a matriz A de adjacências do grafo, supondo os vértices ordenados por ordem alfabética.

    (c) Indique, justificando, o elemento na posição 1,2 da matriz A^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

    (d) Indique as componentes fracas, unilaterais e fortes de G.