Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
Exame - 13/07/2001 - Resolução

1. (a) $p \wedge \neg q$
   (b) $\neg p \rightarrow \neg q$
   (c) $q \rightarrow p$

2. Contradição é uma fórmula bem formada que é falsa para quaisquer valores lógicos dos átomos.

   A fbf
$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$$
   não é uma contradição; na verdade, se p tiver o valor **F**, a implicação $p \rightarrow \neg q$ é **V** e a disjunção $q \vee \neg p$ é também **V**, pelo que a conjunção $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$ é **V**.

3. Demonstração:

1. $\neg p \rightarrow q \wedge r$	premissa
2. $p \rightarrow s$	premissa
3. $\neg s$	premissa
4. $\neg p$	2, 3 e MT
5. $q \wedge r$	1, 4 e MP
6. q	5 e LS

4. (a) i. $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y S(x,y))$
   ii. $\forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow R(x,y))$
   iii. $\forall x (\exists y S(x,y) \rightarrow R(x,2))$
   (b) — *Consultar notas teóricas* —
   (c) Para a interpretação

   Universo de discurso: conjunto dos números reais
   $Q(x,y)$ significa $xy = 1$
   $R(x,y)$ significa $xy \neq x$
   $y = 2$

   a fbf $\forall x (\exists z Q(x,z) \rightarrow R(x,y))$ é verdadeira visto que, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $xz = 1$, então $x \times 2 \neq x$, já que $2x = x \Leftrightarrow x = 0$.

   Para a interpretação

   Universo de discurso: conjunto dos números reais
   $Q(x,y)$ significa $xy = 1$
   $R(x,y)$ significa $xy \neq x$
   $y = 1$

   a fbf $\forall x (\exists z Q(x,z) \rightarrow R(x,y))$ é falsa. Na verdade, $Q(1,1)$ é verdadeira, logo $\exists z Q(1,z)$ é verdadeira; por outro lado, $S(1,1)$ é falsa. Concluimos então que a implicação $\exists z Q(1,z) \rightarrow S(1,1)$ é falsa. Ou seja, para o número real $x = 1$, $\exists z Q(x,z) \rightarrow S(x,1)$ é falsa. Consequentemente a fbf $\forall x (\exists z Q(x,z) \rightarrow R(x,1))$ é falsa.

   Como existe uma interpretação para a qual a fbf é verdadeira, ela não é contraditória. Como existe uma interpretação para a qual a fbf é falsa, ela não é válida. Trata-se, portanto, de uma contigência.

5. (a) Não. (Um conjunto potência tem pelo menos um elemento, o conjunto vazio.)

(b) Sim. $\{\emptyset\}$ é o conjunto potência de $\emptyset$.

(c) Sim. $\{\emptyset, \{a\}\}$ é o conjunto potência de $\{a\}$.

(d) Não. (Se $\{\emptyset, a\}$ pertencer ao conjunto potência de um conjunto X, então $\emptyset \in X$ e, portanto, o conjunto potência de X terá de conter o conjunto $\{\emptyset\}$.)

(e) Sim. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ é o conjunto potência de $\{a,b\}$.

6. (a) $A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A^c) = A \cap (A^c \cap B) = (A \cap A^c) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$

   (b) $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = (A \cup B) \cap E = A \cup B$

7. (a) Tem-se que $n^2 + n = n(n+1)$. Dado um natural n, ou n ou o seu sucessor $n+1$ é par. Logo $n(n+1)$ é par, ou seja $n^2 + n$ é par.

   (b) Base indutiva: A propriedade é válida para $n = 0$, visto que $0 = 0^3 - 0$ é divisível por 6.

   Hipótese indutiva: $n^3 - n$ é divisível por 6.

   Passo indutivo: Admitindo a hipótese indutiva prova-se que $(n+1)^3 - (n+1)$ é divisível por 6.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= (n^2+2n+1)(n+1) - (n+1) \\ &= n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - (n+1) \\ &= n^3 - n + n + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - (n+1) \\ &= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

   $(n^3 - n)$ é disível por 6, por hipótese indutiva; como $n^2 + n$ é par, $3(n^2 + n)$ é divisível por 6. Logo $(n^3 - n) + 3(n^2 + n)$ é divisível por 6.

   Conclusão: Para todo o número natural n, $(n^3 - n) + 3(n^2 + n)$ é divisível por 6.

8. Considere sobre o conjunto $\{0,1,2,3\}$ a relação $R = \{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0)\}$. Indique:

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) Fecho reflexivo de R: $\{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(0,0),(3,3)\}$.

   (c) Fecho simétrico de R: $\{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(1,0),(2,1),(0,2),(0,3)\}$.

   (d) $R^2 = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(1,0),(2,1),(2,2),(2,0),(3,1)\}$.

   (e) $R^{-1} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(0,2),(2,2),(0,3)\}$.

9. (a) O erro está em partir do princípio de que, dado $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $(a,b) \in R$.

   (b) $R = \{(2,2)\}$ é uma relação não vazia sobre $\{1,2\}$, simétrica e transitiva; mas não é reflexiva, visto não conter o par (1,1).

10. (a) — *Consultar notas teóricas* —

    (b) Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as strings sobre $\{0,1\}$ de comprimento ímpar e cujos caracteres apresentam uma simetria relativamente ao caracter do meio. Definição recursiva de $\mathcal{S}$:

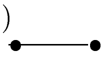
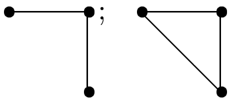
    1. $0 \in \mathcal{S}$ e $1 \in \mathcal{S}$.
    2. Se $P \in \mathcal{S}$, então $0P0$ e $1P1$ pertencem a $\mathcal{S}$.

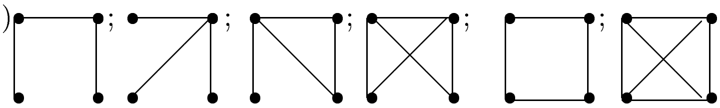
11. Usando a definição recursiva de f, tem-se sucessivamente:

$f(2) = f(1+1) = f(1)f(0) = 1$
$f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) = 1$
$f(4) = f(3+1) = f(3)f(2) = 1$

Por outro lado, $(-10)\text{mod}13 = 3$, visto que $-10 = -13 + 3$.

Logo $(-10)\text{mod}13 + [\frac{1}{2} + [\frac{1}{2}]] + f(3) + f(4) = 3 + [\frac{1}{2} + 0] + 1 + 1 = 3 + 0 + 2 = 5$.

12. (i)  (ii) 

(iii) 

13. (a) São caminhos as sequências:
(i), que é um caminho elementar (logo também simples);
(iv), que é um caminho, mas não é simples nem elementar;
(v), que é um caminho simples mas não elementar.
Nenhuma das outras sequências é caminho. Nenhuma das cinco sequências é ciclo.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) O elemento na posição 1,2 da matriz A^n é igual ao número de caminhos de comprimento n de a para b do grafo. Observando o digrafo conclui-se que o elemento na posição 1,2 da matriz A^n é 1 se $n = 3k + 1$ para algum inteiro não negativo k, e é 0 para os outros n's.

(d) Tem uma só componente fraca, o próprio grafo, visto ele ser fracamente conexo.

Tem uma só componente unilateral, o próprio grafo, já que ele é unilateralmente conexo. Com efeito, dados quaisquer dois vértices x e y do grafo, existe um caminho de x para y ou de y para x.

Componentes fortes: