Álgebra de Boole

A Álgebra de Boole é uma ferramenta matemática muito utilizada na representação e simplificação de funções binárias (ou lógicas), sendo a sua designação resultante do contributo do Matemático George Boole.

Definições

- Variável lógica (ou de Boole ou binária) - Variável que tem por domínio 2 valores lógicos distintos, representados pelos valores 0 e 1 (ou outras designações como FALSE(F) e TRUE (T) ou FALSO(F) e VERDADEIRO(V)).
- Função lógica (ou de Boole ou binária) - Função que tem por contradomínio os valores lógicos 0 e 1.
- Operadores/Funções lógicos elementares:

  Intersecção (conjunção ou produto lógico)- AND

  $$F(A,B) = A \cdot B = A\,B$$

A B	$f(A,B) = A \cdot B$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

  União (disjunção ou soma lógica) - OR

  $$F(A,B) = A + B$$

A B	$f(A,B) = A + B$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

  Complemento (negação ou inversão) – NOT

  $$F(A) = \overline{A} = A'$$

A	$f(A) = \overline{A}$
0	1
1	0

- Expressões lógicas **-** É um conjunto de variáveis (literais) e constantes lógicas (0 e 1) ligadas entre si pelos sinais dos operadores lógicos elementares. Constituem uma das formas para descrever funções lógicas (outras formas: tabelas de verdade, mapas de karnaugh, etc..).

  Exemplos:

  $$f(A,B,C) = A \cdot B + \overline{C} \cdot \overline{A} \cdot B$$

  $$f(A,B,C) = 0 + A + \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot 1$$
- Literal – Cada ocorrência de uma variável na sua forma complementada ou não complementada.
- Precedência dos operadores:
  - a avaliação de uma expressão lógica é realizada da esquerda para a direita;
  - sub-expressões entre parêntesis são avaliadas em primeiro lugar;
  - dentro das sub-expressões, primeiro avaliam-se os operadores de negação, depois de produto e, finalmente, de adição.

  Exemplo: X+Y’**.**Z é avaliado como (X+(Y’**.**Z))
- Expressões lógicas equivalentes - Quando uma delas só for igual a 1 quando a outra também for igual a 1, e igual a 0 quando a outra também for igual a 0.
- Expressões lógicas complementares - Se uma delas for igual a 1 quando a outra for igual a 0,e vice-versa.
- Expressões lógicas duais - Quando de uma se pode obter a outra:

  - transformando todos os · em **+** (produtos em somas);
  - transformando todos os + em · (somas em produtos);
  - transformando todos os 0 em 1 ;
  - transformando todos os 1 em 0 ;
  - e mantendo as ocorrências das variáveis (literais).

  Exemplo:

  $1 \cdot B + \overline{C} \cdot \overline{A} \cdot B + 0$ é dual de $(0 + B) \cdot (\overline{C} + \overline{A} + B) \cdot 1$

  Não existe nenhuma relação entre os valores lógicos de expressões duais: podem ser ambas iguais a 0, ambas iguais a 1, ou uma igual a 1 e outra igual a 0. Mas as <u>identidades lógicas</u> duais têm a propriedade de que quando uma é verdadeira a outra também o é.

Exemplo:

Identidades duais - se a identidade $A + 0 = A$ se verifica então também se verifica a identidade $A \cdot 1 = A$.

- Uma função lógica é representada de forma inequívoca por uma tabela de verdade, mas admite a representação através de várias expressões lógicas equivalentes.
- Uma função lógica pode ser representada por um circuito lógico (diagrama lógico) constituído por portas lógicas.

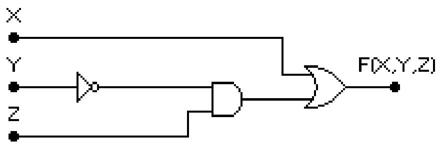
Exemplo:

A função F(X,Y,Z) pode ser representada:

- pela expressão X + Y'.Z
- pela tabela de verdade

X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- pelo diagrama lógico



Postulados e teoremas da Álgebra de Boole

Postulados

A=0 ou A=1

$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$
$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	$0 + 1 = 1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 1$	$0 + 0 = 0$
$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$

Teoremas

		Dual	
T1	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$	0 - elemento absorvente do produto lógico 1 - elemento absorvente da soma lógica
T2	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$	1 - elemento neutro do produto lógico 0 - elemento neutro da soma lógica
T3	$A \cdot A = A$	$A + A = A$	
T4	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$	
T5	$\overline{\overline{A}} = A$		Lei da idempotência
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$	Lei da comutatividade
T7	$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C$	Lei da associatividade
T8	$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B+C)$	$(A+B) \cdot (A+C) = A + B.C$	Lei distributiva
T9	$A+A \cdot B = A$	$A \cdot (A+B)=A$	Lei da absorção
T10	$A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$	Lei do termo "menor"
T11	$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	Lei da adjacência
T12	$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C =$ $A \cdot B + \overline{A} \cdot C$	$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) =$ $(A + B) \cdot (\overline{A} + C)$	Lei do termo "incluído"
T13	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	Lei de DeMorgan

Simplificação de expressões lógicas recorrendo aos teoremas da Álgebra de Boole

É um processo heurístico onde se procuram detectar partes da expressão que sejam simplificadas por aplicação dos teoremas, resultando em expressões equivalentes. O processo repete-se até que já não existam sub-expressões susceptíveis de serem simplificadas, não existindo, no entanto, garantia de que a expressão obtida esteja realmente minimizada.

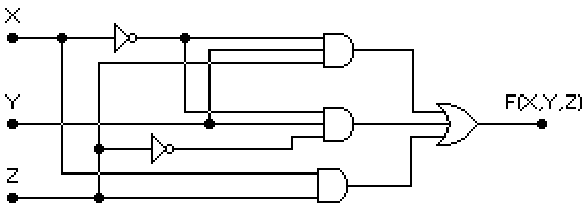
Exemplos:

Nota: a operação de negação é representada pelo símbolo **’**

Expressões equivalentes	Por aplicação do teorema
AB’(C+C’)+A’BC+AB(C’+C)	T4 ; T2
AB’+A’BC+AB	T6
AB’+AB+A’BC	T8
A(B’+B)+A’BC	T4
A+A’BC	T10
A+BC	

Expressões equivalentes	Por aplicação do teorema
A’+AB+AC’+AB’C’	T10
A’+B+AC’+AB’C’	T8
A’+B+AC’(1+B’)	T1;T2
A’+B+AC’	T6
A’+AC’+B	T10
A’+C’+B	

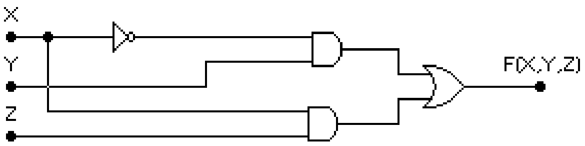
Dado o diagrama lógico



Obtém-se a expressão lógica F(X,Y,Z)= X’YZ+X’YZ’+XZ

Simplificando ...

	Por aplicação do teorema
X’YZ+X’YZ’+XZ	T11
X’Y+XZ	



Complemento de funções lógicas

1º Método – Aplicação do teorema de DeMorgan

Exemplo:

Dada a função F(X,Y,Z)=X’YZ’+X’Y’Z

Determinar o complemento da função F

F’(X,Y,Z)=(X’YZ’+X’Y’Z)’

=(X’YZ’)’ . (X’Y’Z)’

=(X+Y’+Z) . (X+Y+Z’)

2º Método – Complementação de cada literal da expressão lógica dual

Exemplo:

Dada a função F(X,Y,Z)=X’YZ’+X’Y’Z

Determinar o complemento da função F

F’(X,Y,Z)=(X’YZ’+X’Y’Z)’

1º Determinação da expressão dual

F_d(X,Y,Z)=(X’+Y+Z’) . (X’+Y’+Z)

2º Complementação de cada literal de Fd

F’(X,Y,Z)=(X+Y’+Z) . (X+Y+Z’)

Formas algébricas das expressões lógicas

Por manipulação algébrica, qualquer expressão pode ser transformada numa das formas algébricas a seguir apresentadas.

Forma soma de produtos e produto de somas

- Forma soma de produtos - quando a expressão é constituída por somas lógicas de produtos lógicos (termo produto).
  Exemplo:
  F(A,B,C)=ABC+A'B
  Exprimir F(A,B,C,D)=(A'+BC).(B+C'D) sob a forma soma de produtos.
  (A'+BC).(B+C'D)
  ⇔ A'B+A'C'D+BBC+BCC'D
  ⇔ A'B+A'C'D+BC
- Forma produto de somas - quando a expressão é constituída por produtos lógicos de somas lógicas (termo soma).
  Exemplo:
  F(A,B,C)=(A+B+C').(A'+B)
  Exprimir F(A,B,C,D)=(A'+BC).(B+C'D) sob a forma produto de somas.
  (A'+BC).(B+C'D)
  ⇔(A'+B).(A'+C).(B+C').(B+D)

Formas canónicas

- As formas canónicas facilitam o processo de simplificação das expressões lógicas.
- mintermo – é um produto em que cada uma das variáveis aparece apenas uma vez, na forma complementada ou não complementada. A cada combinação de valores das variáveis de entrada está associado um mintermo, identificado por m_j, onde j é o valor decimal equivalente ao valor binário da combinação para a qual o mintermo tem o valor 1.

X	Y	Z	mintermo	símbolo	m_o	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	X'Y'Z'	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	X'Y'Z	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	X'YZ'	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	X'YZ	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	XY'Z'	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	XY'Z	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	XYZ'	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

- Forma canónica soma de produtos (FCSP)- quando a expressão é constituída pela soma lógica dos mintermos para os quais a função toma o valor 1.
  Exemplo:
  Dada a tabela de verdade da função F(X,Y,Z)

símbolo	mintermo	X	Y	Z	F	F'
m_0	X'Y'Z'	0	0	0	1	0
m_1	X'Y'Z	0	0	1	0	1
m_2	X'YZ'	0	1	0	1	0
m_3	X'YZ	0	1	1	0	1
m_4	XY'Z'	1	0	0	0	1
m_5	XY'Z	1	0	1	1	0
m_6	XYZ'	1	1	0	0	1
m_7	XYZ	1	1	1	1	0

  A forma canónica soma de produtos (FCSP) de F(X,Y,Z) é dada pela expressão
  F(X,Y,Z)=X'Y'Z'+X'YZ'+XY'Z+XYZ=$m_0+m_2+m_5+m_7$
  F(X,Y,Z)=$\sum$m(0,2,5,7) (notação reduzida da FCSP)
  O complemento da função contém os mintermos não incluídos na função original. Para o exemplo anterior, temos F'(X,Y,Z)=X'Y'Z+X'YZ+XY'Z'+XYZ'=$\sum$m(1,3,4,6)

- Qualquer expressão lógica de uma função pode ser manipulada de modo a exprimir-se na FCSP.
  Exemplo:
  Exprimir F(A,B,C)=A+BC sob a forma canónica soma de produtos.

A+BC
⇔AB+AB'+BC
⇔ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+BC
⇔ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+ABC+A'BC
⇔ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+A'BC
F(A,B,C)= ∑m(3,4,5,6,7)

- maxtermo- é uma soma em que cada uma das variáveis aparece apenas uma vez, na forma complementada ou não complementada. A cada combinação de valores das variáveis de entrada está associado um maxtermo, identificado por M_j, onde j é o valor decimal equivalente ao valor binário da combinação para a qual o maxtermo tem o valor 0.

X	Y	Z	maxtermo	símbolo	M_o	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	X+Y+Z	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	X+Y+Z'	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	X+Y'+Z	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	X+Y'+Z'	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	X'+Y+Z	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	X'+Y+Z'	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	X'+Y'+Z	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	X'+Y'+Z'	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

- Forma canónica produto de somas (FCPS)- quando a expressão é constituída pelo produto lógico dos maxtermos para os quais a função toma o valor 0.
  Exemplo:
  Dada a tabela de verdade da função F(X,Y,Z)

símbolo	maxtermo	X	Y	Z	F	F'
M_0	X+Y+Z	0	0	0	1	0
M_1	X+Y+Z'	0	0	1	0	1
M_2	X+Y'+Z	0	1	0	1	0
M_3	X+Y'+Z'	0	1	1	0	1
M_4	X'+Y+Z	1	0	0	0	1
M_5	X'+Y+Z'	1	0	1	1	0
M_6	X'+Y'+Z	1	1	0	0	1
M_7	X'+Y'+Z'	1	1	1	1	0

A forma canónica produto de somas (FCPS) de F(X,Y,Z) é dada pela expressão
F(X,Y,Z)=(X+Y+Z').(X+Y'+Z').(X'+Y+Z).(X'+Y'+Z) =$M_1.M_3.M_4.M_6$
F(X,Y,Z)=∏M(1,3,4,6) (notação reduzida da FCPS)
O complemento da função contém os maxtermos não incluídos na função original. Para o exemplo anterior, temos F'(X,Y,Z)=(X+Y+Z).(X+Y'+Z).(X'+Y+Z')(X'+Y'+Z') =∏M(0,2,5,7)

- Qualquer expressão lógica de uma função pode ser manipulada de modo a exprimir-se na FCPS.
  Exemplo:
  Exprimir F(A,B,C)=A' . (B'+C) sob a forma canónica produto de somas.
  A' . (B'+C)
  ⇔(A'+B).(A'+B').(B'+C)
  ⇔(A'+B+C).(A'+B+C').(A'+B'+C).(A'+B'+C').(B'+C)
  ⇔(A'+B+C).(A'+B+C').(A'+B'+C).(A'+B'+C').(A+B'+C).(A'+B'+C)
  ⇔(A'+B+C).(A'+B+C').(A'+B'+C).(A'+B'+C').(A+B'+C)
  F(A,B,C)= =∏M(2,4,5,6,7)

Formas mínimas

Forma em que o número de termos e número de literais é mínimo. Constitui o ponto de partida para a implementação em circuitos lógicos com portas lógicas discretas, porquanto conduzem, normalmente, à implementação mais simples.

- Forma mínima soma de produtos (FMSP)- quando a expressão é constituída por uma soma de produtos tal que o somatório do número de produtos e do número de literais é mínimo.

- Forma mínima produto de somas (FMPS)- quando a expressão é constituída por um produto de somas tal que o somatório do número de somas e do número de literais é mínimo.

Conversão entre formas canónicas

- Conversão de FCSP para FCPS
  Considerar os maxtermos não incluídos nos mintermos
  Exemplo
  $F(A,B,C)=\sum m(0,2,5,7)=\prod M(1,3,4,6)$
- Conversão de FCPS para FCSP
  Considerar os mintermos não incluídos nos maxtermos
  Exemplo
  $F(A,B,C)= \prod M(1,3)=\sum m(0,2,4,5,6,7)$
- $M_j=m_j'$
  Exemplo:
  $M_4=X'+Y+Z$

  $X'+Y+Z$
  $\Leftrightarrow ((X'+Y+Z)')'$ (dupla negação)
  $\Leftrightarrow (XY'Z')'$ (torema de DeMorgan)
  $\Leftrightarrow m_4'$
- Atendendo ao referido no ponto anterior, facilmente se pode determinar a forma canónica da função complementar.
  Exemplo:
  Dada a função $F(A,B,C)=m_0+m_2+m_5=M_1.M_3.M_4.M_6.M_7$
  $F'(A,B,C)=m_1+m_3+m_4+m_6+m_7=M_0.M_2.M_5$
  Demonstração:
  $F'(A,B,C)=(m_0+m_2+m_5)'=m_0'.m_2'.m_5'=M_0.M_2.M_5$
  $F'(A,B,C)=(M_1.M_3.M_4.M_6.M_7)'=M_1'+M_3'+M_4'+M_6'+M_7'= m_1+m_3+m_4+m_6+m_7$

Tabelas de verdade

Tal como referido anteriormente, as tabelas de verdade constituem um dos processos de descrição das funções lógicas.

- Vantagens:
  - facilidade com que se obtém a partir da formulação verbal da função a implementar.
  - facilidade na obtenção das expressões algébricas nas formas canónicas.
  - possibilidade de passar directamente à implementação de funções lógicas com certos componentes MSI e LSI.
  - constituem o ponto de partida para métodos gráficos e tabulares de simplificação de funções (mapas de Karnaugh).
- Construção da tabela de verdade a partir da formulação verbal
  Exemplo:
  Pretende-se construir a função F(X,Y,Z) que tenha o valor 1 sempre que o número de 1's nas variáveis de entrada X, Y e Z seja um número ímpar.

Nº	X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

- Formas canónicas a partir da tabela de verdade
  Exemplo:
  Dada a tabela de verdade da função lógica F(A,B,C)

Nº termo	A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

F(A,B,C) é uma função lógica de 3 variáveis A,B e C, assumindo o valor 1 para as combinações 001, 010 e 110

e o valor 0 para as combinações 000, 011, 100, 101 e 111
Recorrendo à definição de mintermo e maxtermo, facilmente se obtém da tabela a expressão lógica da função na forma canónica soma de produtos:
$F(A,B,C)=A'B'C+A'BC'+ABC'=m_1+m_2+m_6=\sum m(1,2,6)$
ou na forma canónica produto de somas:
$F(A,B,C)=(A+B+C).(A+B'+C').(A'+B+C).(A'+B+C').(A'+B'+C')=M_0.M_3.M_4.M_5.M_7=\prod M(0,3,4,5,7)$

Determinação da tabela de verdade a partir de uma expressão lógica

1º Método – Avaliação da expressão recorrendo a cálculos intermédios

F(X,Y,Z)=X+YZ'

Var. entrada			Cálculos intermédios		F(X,Y,Z)
X	Y	Z	Z'	Y.Z'	X+YZ'
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Para expressões mais complexas, este método pode tornar-se moroso e é bastante susceptível a erros.

2º Método – Interpretação/leitura da expressão lógica

Quando as expressões lógicas estão na forma soma de produtos ou produtos de somas, é possível efectuar-se uma interpretação/leitura da expressão que permita a obtenção da tabela de verdade de uma forma expedita.
Exemplo:
F(X,Y,Z)=X+YZ'
A expressão encontra-se na forma soma de produtos, logo podemos concluir que
a função F toma o valor 1:

quando X=1	**ou** quando Y.Z'=1
⇔X=1 ; ∀ Y ; ∀ Z	⇔∀ X ; Y=1 ; Z'=1
(Nº termo= 4;5;6;7)	⇔∀ X ; Y=1 ; Z=0
	(Nº termo= 2;6)

Nº termo	X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

F(X,Y,Z)=X+YZ' ⇔(X+Y).(X+Z')
A expressão encontra-se na forma produto de somas, logo podemos concluir que
a função F toma o valor 0:

quando X+Y=0	**ou** quando X+Z'=0
⇔X=0 ; Y=0 ; ∀ Z	⇔X=0 ; ∀ Y ; Z'=0
(Nº termo= 0;1)	⇔X=0 ; ∀ Y ; Z=1
	(Nº termo= 1;3)

Nº termo	X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1