Mapas de karnaugh

- Constitui um método gráfico/tabular de representação de funções e de aplicação sistemática do processo de simplificação algébrica.
- Permite a fácil determinação das formas mínimas soma de produtos e produto de somas.
- É uma método de fácil aplicação para funções de no máximo 4 variáveis.
- Os mapas de karnaugh são constituídos por células, cada uma das quais é representativa de um mintermo/maxtermo. No mapa de karnaugh de uma função, representada na forma canónica soma de produtos, as células correspondentes aos mintermos da função têm o valor 1 e as restantes células têm o valor 0. Em alternativa podemos definir que no mapa de Karnaugh de uma função, representada na forma canónica produto de somas, as células correspondentes aos maxtermos da função têm o valor 0 e as restantes têm o valor 1.
- Qualquer par de células na horizontal ou vertical (células adjacentes) corresponde a mintermos/maxtermos que diferem em apenas um literal. As células na coluna mais à direita são adjacentes às células da coluna da esquerda, bem como, as células na linha superior são adjacentes às células da linha inferior.

Mapas de Karnaugh para funções de duas variáveis

Exemplo: F(X,Y)

m_0	m_1
m_2	m_3

X'Y'	X'Y
XY'	XY

		Y
	0	1
X	2	3

Mapas de Karnaugh para funções de três variáveis

Exemplo: F(X,Y,Z)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

X'Y'Z'	X'Y'Z	X'YZ	X'YZ'
XY'Z'	XY'Z	XYZ	XYZ'

			Y	Y
	0	1	3	2
X	4	5	7	6
		Z	Z	

Mapas de Karnaugh para funções de quatro variáveis

Exemplo: F(X,Y,Z,W)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Z

0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

Y

X

W

X'Y'Z'W'	X'Y'Z'W	X'Y'ZW	X'Y'ZW'
X'YZ'W'	X'YZ'W	X'YZW	X'YZW'
XYZ'W'	XYZ'W	XYZW	XYZW'
X'YZW	X'YZW'	XY'ZW	XY'ZW'

Representação de funções com mapas de karnaugh

Exemplo:

$F(X,Y)=\sum m(1,2,3)=M_0$

Y

0	1
1	1

X

Exemplo:

$F(A,B,C)=\sum m(1,3,4,5,6)=\prod M(0,2,7)$

Mapa de karnaugh

B

0	1	1	0
1	1	0	1

A

C

Exemplo:

$F(X,Y,Z,W)=\sum m(3,4,5,7,11,12,13,15) =\prod M(0,1,2,6,8,9,10,14)$

Z

0	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0
0	0	1	0

Y

X

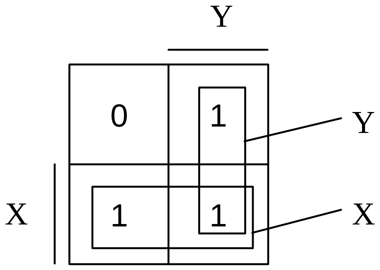
W

Simplificação de funções com mapas de Karnaugh - forma mínima soma de produtos

Comparação entre métodos de simplificação (Karnaugh e manipulação algébrica)

Exemplo:
$F(X,Y)=m_1+m_2+m_3$
Por manipulação algébrica obtém-se
=X'Y+XY'+XY
=X'Y+X(Y'+Y)
=X'Y+X
=X+Y
A partir do mapa de karnaugh, considera-se os grupos de células adjacentes (1,3) e (2,3), rescrevendo a função
F=(X'Y+XY)+(XY'+XY)
=Y(X'+X) X(Y'+Y)
=Y+X

Mapa de karnaugh



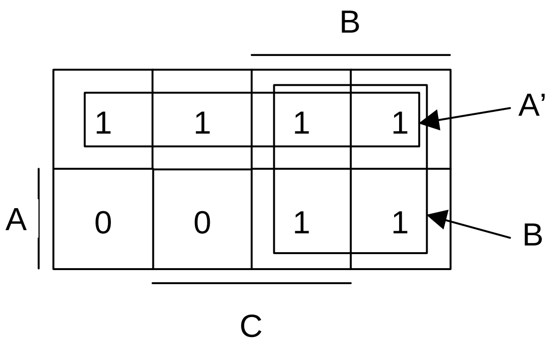
O rectângulo do grupo (1,3) intersecta a fronteira de X, logo esta variável desaparece. O rectângulo do grupo (2,3) intersecta a fronteira de Y, logo esta variável desaparece.

Resumindo, para funções de 2 variáveis, obtém-se:

Grupos (Nº de células)	Expressão
1 célula	Mintermo com 2 literais
Rectângulo com 2 células	1 literal
Rectângulo com 4 células	Valor lógico 1

Exemplo:
F(A,B,C)=∑m(0,1,2,3,6,7)
=A'B'C'+A'B'C+A'BC'+A'BC+ABC'+ABC
Por manipulação algébrica obtém-se
=A'B'(C'+C)+A'B(C'+C)+AB(C'+C)
=A'B'+A'B+AB
=A'(B'+B)+B(A'+A)
=A'+B
A partir do mapa de karnaugh, considera-se os grupos de células adjacentes (0,1,2,3) e (2,3,6,7), resultando nos termos A' e B respectivamente.
F=A'+B

Mapa de karnaugh



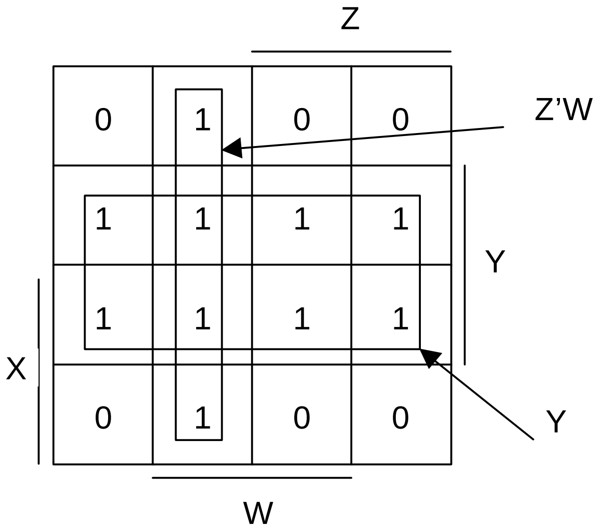
O rectângulo do grupo (0,1,2,3) intersecta a fronteira das variáveis B e C, logo desaparecem estas variáveis. O rectângulo do grupo (2,3,6,7) intersecta a fronteira das variáveis A e C, logo desaparecem estas variáveis.

Resumindo, para funções de 3 variáveis, obtém-se:

Grupos (Nº de células)	Expressão
1 célula	Mintermo com 3 literais
Rectângulo com 2 células	2 literais
Rectângulo com 4 células	1 literal
Rectângulo com 8 células	Valor lógico 1

Exemplo:
F(X,Y,Z,W)=∑m(1,4,5,6,7,9,12,13,14,15) =∏M(0,2,3,8,10,11)
=X'Y'Z'W+X'YZ'W'+X'YZ'W+X'YZW'+X'YZW+XY'Z'W+XYZ'W'+XYZ'W+XYZW'+XYZW
Por manipulação algébrica obtém-se
=Z'W(X'Y'+X'Y+XY'+XY)+Y(X'Z'W'+X'Z'W+X'ZW'+X'ZW+XZ'W'+XZ'W+XZW'+XZW)
=Z'W(X'(Y'+Y)+X(Y'+Y))+Y(X'Z'(W'+X)+X'Z(W'+W)+XZ'(W'+W)+XZ(W'+W))
=Z'W(X'+X)+Y(X'Z'+X'Z+XZ'+XZ)
=Z'W+Y(X'(Z'+Z)+X(Z'+Z))
=Z'W+Y(X'+X)
=Z'W+Y
A partir do mapa de karnaugh, considera-se os grupos de células adjacentes (1,5,13,9) e (4,5,6,7,12,13,14,15), resultando nos termos Z'W e Y respectivamente.

Mapa de karnaugh



O rectângulo do grupo (1,5,13,9) intersecta a fronteira das variáveis X e Y, logo desaparecem estas variáveis. O rectângulo do grupo (4,5,6,7,12,13,14,15) intersecta a fronteira das variáveis X, Z e W, logo desaparecem estas variáveis.

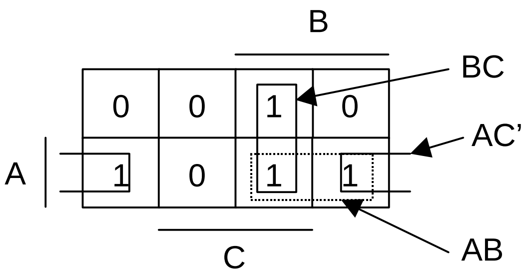
Resumindo, para funções de 4 variáveis, obtém-se:

Grupos (Nº de células)	Expressão
1 célula	Mintermo com 4 literais
Rectângulo com 2 células	3 literais
Rectângulo com 4 células	2 literais
Rectângulo com 8 células	1 literal
Rectângulo com 16 células	Valor lógico 1

Método sistematizado para simplificação de funções

Exemplo:

F(A,B,C)=∑m(3,4,6,7)=A'BC+AB'C'+ABC'+ABC



A partir dos grupos (3,7) , (4,6) e (6,7) resulta a expressão F(A,B,C)=BC+AC'+AB. No entanto, pela aplicação do teorema T12, obtém-se F(A,B,C)=BC+AC'. De facto, no processo de simplificação através do mapa de karnaugh, o grupo (6,7) não deve ser considerado por não ser um grupo primário essencial.

Definições:

- ♦ Grupo (implicante) – Rectângulo de células adjacentes com tamanho 2^m (m=0,1,..n) num mapa de Karnaugh de n variáveis.
- ♦ Grupo primário – Grupo não incluído noutro grupo, ou seja, cada grupo deve ter o maior número possível de células.
- ♦ Grupo primário essencial – Grupo primário que inclui uma célula com o valor 1 que não possa ser incluída noutro grupo primário.

Aplicando estas definições ao exemplo anterior, F(A,B,C)=∑m(3,4,6,7), verifica-se:

- (3,7), (4,6), (6,7) são grupos primários;
- (3,7), (4,6) são grupos primários essenciais que incluem todos as células com valor 1, pelo que apenas estes devem ser considerados na obtenção da expressão final F(A,B,C)=BC+AC'.

Método sistematizado

1º- Determinar os grupos primários

2º- Considerar apenas os grupos primários essenciais

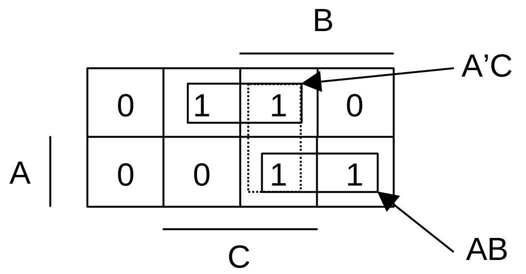
3º- Até que todas as células com valor 1 estejam incluídas:

- Considerar os grupos primários com o maior número de células.

- Em caso de empate entre dois grupos, escolher um ao acaso.
- Repetir este processo até que todas as células com o valor 1 estejam incluídas.

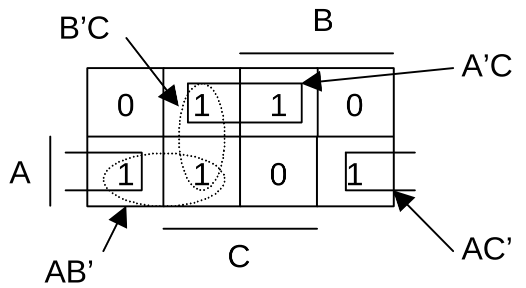
Note-se que deve ser objectivo deste processo, por uma lado, maximimizar a dimensão dos grupos – dado reduzirem o número de literais do termo associado – e, por outro lado, minimizar o número de grupos – dado reduzir o número de termos na expressão final (forma mínima soma de produtos).

Exemplo:
F(A,B,C)=∑m(1,3,6,7)=A'B'C+A'BC+ABC'+ABC



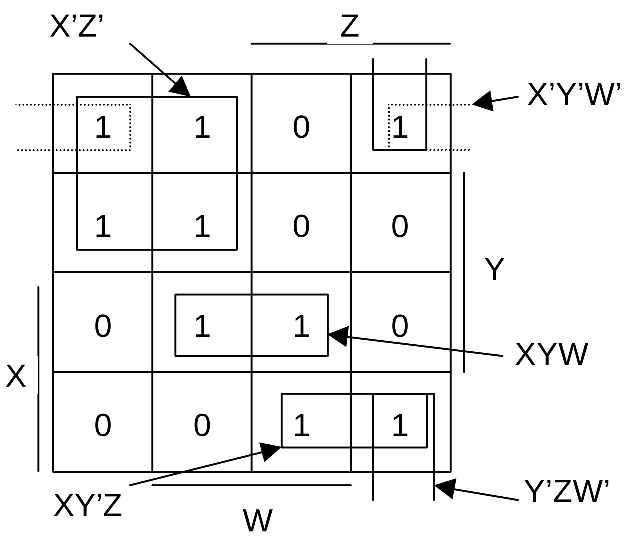
Aplicação do método:
Grupos primários: (1,3) , (3,7), (6,7)
Grupos primários essenciais: (1,3) , (6,7)
Como todas as células com o valor 1 estão incluídas nos grupos primários essenciais, apenas estes serão considerados, donde resulta a expressão simplificada F(A,B,C)=AB+A'C

Exemplo:
F(A,B,C)=∑m(1,3,4,5,6)=A'B'C+A'BC+AB'C'+AB'C+ABC'



Aplicação do método:
Grupos primários: (1,3), (1,5), (4,5), (4,6)
Grupos primários essenciais: (1,3), (4,6)
Faltando incluir a célula 5, temos a escolha em alternativa dos grupo primários (1,5) ou (4,5).
Escolhendo o grupo primário (1,5), obtém-se F(A,B,C)=A'C+AC'+B'C ou, em alternativa, escolhendo o grupo primário (4,5), obtém-se F(A,B,C)=A'C+AC'+AB'.

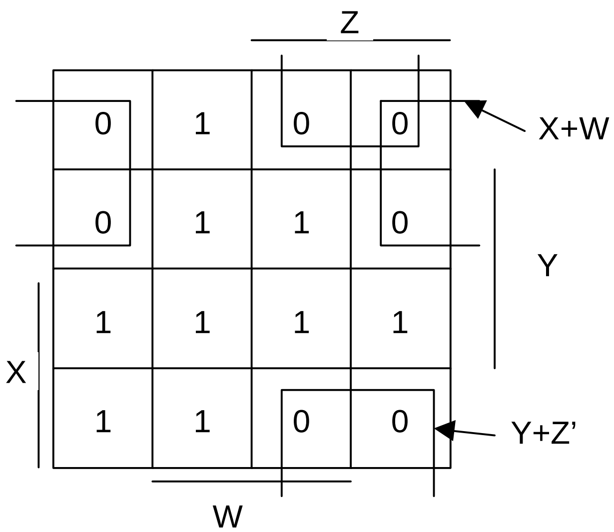
Exemplo:
F(X,Y,Z,W)=∑m(0,1,2,4,5,10,11,13,15)



Grupos primários:
(0,1,4,5) ⇔ X'Z'
(0,2) ⇔ X'Y'W'
(5,13) ⇔ YZ'W
(13,15) ⇔ XYW
(11,15) ⇔ XZW
(10,11) ⇔ XY'Z
(2,10) ⇔ Y'ZW'
Grupos primários essenciais:
(0,1,4,5) ⇔ X'Z'
Da aplicação do método sistematizado obtém-se várias soluções alternativas, entre as quais:
F(X,Y,Z,W)=X'Z'+XYW+XY'Z+Y'ZW' , considerando os grupos (0,1,4,5), (13,15), (10,11) e (2,10);
F(X,Y,Z,W)=X'Z'+XYW+XY'Z+X'Y'W', considerando os grupos (0,1,4,5), (13,15), (10,11) e (0,2).

Simplificação de funções com mapas de Karnaugh - forma mínima produto de somas

O processo de simplificação de funções é em tudo idêntico ao definido para a forma mínima soma de produtos. Considera-se, agora, as células para as quais a função é zero.
Exemplo:



F(X,Y,Z,W)=∏M(0,2,3,4,6,10,11)
=(X+Y+Z+W).(X+Y+Z’+W).(X+Y+Z’+W’).(X+Y’+Z+W).
(X’+Y’+Z+W).(X’+Y+Z’+W).(X’+Y+Z’+W’)

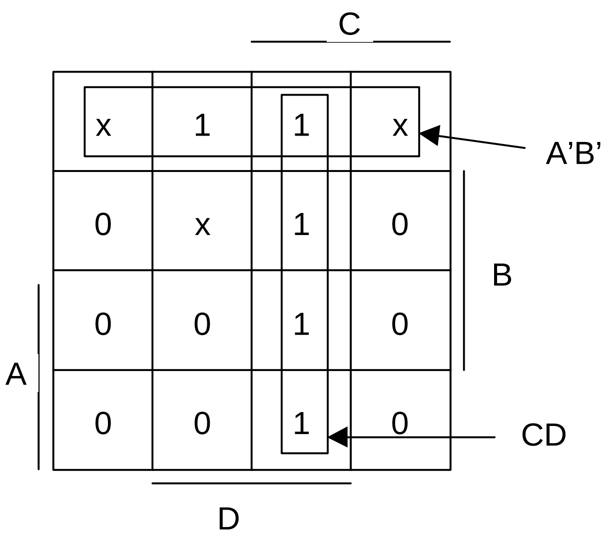
Grupos primários: (0,2,4,6) e (2,3,10,11)
Grupos primários essenciais: (0,2,4,6) e (2,3,10,11)
Como todas as células com valor 0 estão incluídas nos grupos primários essenciais, a função mínima produto de somas é definida por F(X,Y,Z,W)=(X+W).(Y+Z’)

Condições indiferente (“don’t care conditions”)

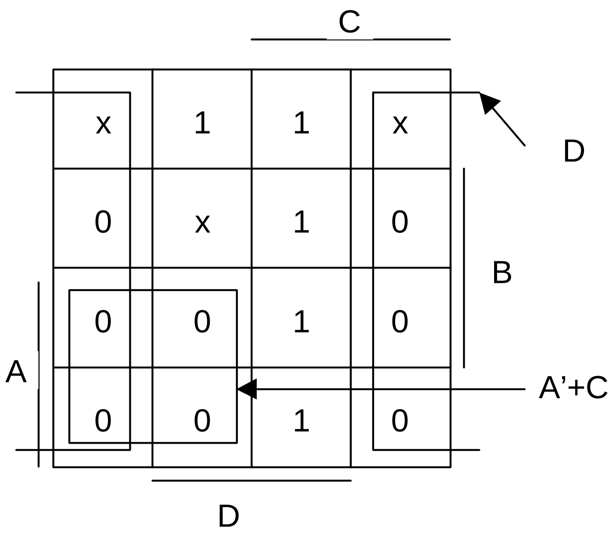
- As condições indiferente numa função lógica podem existir quando:
  - determinadas combinações de entrada nunca ocorrem;
  - não é significativo o valor da função para determinadas combinações de entrada.

- Nos mapas de Karnaugh, as células correspondentes a condições indiferente são assinaladas com o símbolo X.
- No processo de simplificação, as células correspondentes às condições indiferente podem ser incluídas ou não nos grupos, sempre que isso conduza a uma redução do número de grupos ou de literais.

  Exemplo:
  F(A,B,C,D)=∑m(1,3,7,11,15) com as condições indiferente d(A,B,C,D)=∑m(0,2,5)



Forma mínima soma de produtos
F(A,B,C,D)=A’B’+CD
Ao definir-se estes grupos, a função terá o valor 1 para a combinação de entrada (0,0,0,0) e (0,0,1,0) e terá o valor 0 para a combinação de entrada (0,1,0,1).



Forma mínima produto de somas
F(A,B,C,D)=(A'+C).D
Ao definir-se estes grupos, a função terá o valor 1 para a combinação de entrada (0,1,0,1) e terá o valor 0 para as combinações de entrada (0,0,0,0) e (0,0,1,0).