## Álgebra de Boole Binária

- A Álgebra de Boole binária – através do recurso à utilização de funções booleanas (ou funções lógicas) – é a principal teoria de suporte às metodologias de síntese e análise de circuitos digitais.

- Utiliza variáveis binárias, i.e., que só podem assumir um de dois valores:
{0,1}; {Low,High}; {True,False}; etc.

- Às variáveis Binárias também se dá o nome de variáveis Lógicas ou Booleanas



Sistemas Digitais

## Álgebra de Boole Binária

- Como só estão definidos 2 elementos no universo da Álgebra de Boole binária, o número de funções lógicas é finito, o que potencia uma abordagem algébrica bastante simples
- Veja-se o exemplo para uma única variável:

Tabela de verdade

| x | $f_0(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **1** | 0 | 1 | 0 | 1 |

- Só existem 4 funções possíveis!

$f_0(x)=0$ $\quad f_1(x)=x$ $\quad f_2(x)=\overline{x}$ $\quad f_3(x)=1$

constante 0 identidade negação constante 1

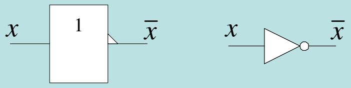
# Álgebra de Boole Binária

## Negação (NOT)

- Das funções apresentadas, a Negação, Complemento, ou NOT, é a mais importante, e caracteriza-se por transformar uma afirmação Verdadeira numa Falsa (e vice-versa)
- Para além da expressão algébrica e da tabela de verdade, a negação pode ser graficamente representada por um dos seguintes símbolos lógicos:

$$f(x) = \overline{x}$$

NOT




- Dupla Negação: $\overline{\overline{x}} = x$
- Demonstração do teorema da dupla negação por indução completa:

| x | $\overline{x}$ | $\overline{\overline{x}}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |





# Álgebra de Boole Binária

## Funções de duas variáveis

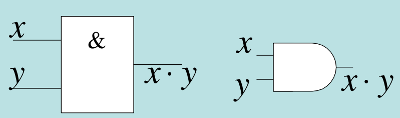
- Existem 16 diferentes funções lógicas de 2 variáveis. As mais importantes são denominadas AND, OR, NAND, NOR e XOR
- Conjunção (AND, Produto Lógico, ∧) e Disjunção (OR, Soma Lógica, ∨):

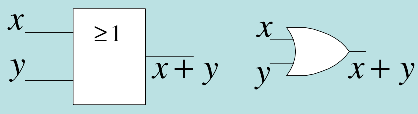
AND

| x | y | x.y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

OR

| x | y | x+y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



# Álgebra de Boole Binária

## Funções de duas variáveis

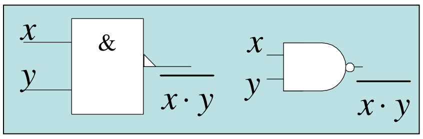
- NAND (AND negado), NOR (OR negado) e XOR (OU-Exclusivo):

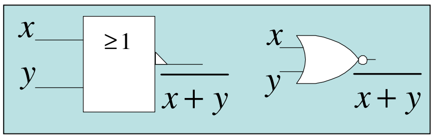
NAND

| x | y | $\overline{x.y}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

NOR

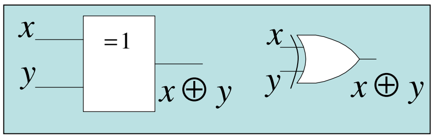
| x | y | $\overline{x+y}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |




XOR

| x | y | x⊕y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |








# Álgebra de Boole Binária

Uma **Álgebra de Boole binária** é um **sistema algébrico** $B_2$ = (A={0,1}, . ,+) formado por um **conjunto gerador** A e por duas operações binárias, . , +, designadas por **produto lógico** e **soma lógica**, e por uma operação designada por complemento, tal que:

•**(I)** $\forall_{x,y \in A} (x \cdot y \in A) \wedge (x + y \in A)$ **(Propriedade de Fecho)**

•**(II)** $\forall_{x,y,z \in A}$ verifica-se

- A1 (**Propriedade Comutativa**) $x \cdot y = y \cdot x$ $\quad x + y = y + x$
- A2 (**Propriedade Associativa**) $x + (y + z) = (x + y) + z$ $\quad x.(y.z) = (x.y).z$
- A3 (**Propriedade Distributiva**) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ $\quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- A4 (**Elemento neutro**) $x \cdot 1 = x$ $\quad x + 0 = x$
- A5 (**Complemento**) $x \cdot \overline{x} = 0$ $\quad x + \overline{x} = 1$
- A6 (**Idempotência**) $x \cdot x = x$ $\quad x + x = x$

**[Hist.] Boole, George** (1815-1864), Matemático britânico. Em 1854, publicou "*An Investigation of the Laws of Thought" onde descreveu um sistema algébrico mais tarde designado por álgebra de Boole*

Sistemas Digitais

## Álgebra de Boole Binária

### Propriedades Básicas da Álgebra de Boole Binária

| | |
|---|---|
| $x+0=x$ | $x\cdot 1=x$ |
| $x+1=1$ | $x\cdot 0=0$ |
| $x+x=x$ | $x\cdot x=x$ |
| $x+\overline{x}=1$ | $x\cdot\overline{x}=0$ |

$$\overline{\overline{x}}=x$$

$$x\oplus y=\overline{x}\cdot y+x\cdot\overline{y}$$
$$x\oplus y=(x+y)\cdot(\overline{x}+\overline{y})$$
$$x\oplus 0=x$$
$$x\oplus 1=\overline{x}$$
**(XOR)**
$$\overline{x\oplus y}=\overline{x}\oplus y=x\oplus\overline{y}$$

| | | |
|---|---|---|
| $x+y=y+x$ | $x\cdot y=y\cdot x$ | **Comutatividade** |
| $x+(y+z)=(x+y)+z$ | $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ | **Associatividade** |
| $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ | $x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$ | **Distributividade** |
| $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$ | $\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$ | **DeMorgan** |
| $x\cdot y+x\cdot\overline{y}=x$ | $(x+y)\cdot(x+\overline{y})=x$ | **Adjacência** |



Sistemas Digitais

## Álgebra de Boole Binária

### Princípio da Dualidade

- **Qualquer expressão válida numa álgebra de Boole tem uma expressão dual, também válida nessa álgebra**, que se obtém por troca do símbolo operatório '**+**' com o símbolo operatório '**.**', e por troca do par de valores **0** e **1**

$$x+0=x \quad x\cdot 1=x$$

Sistemas Digitais

## Álgebra de Boole Binária

Mais teoremas...

- **Absorção**

$$x\cdot(x+y)=x \qquad\qquad x+x\cdot y=x$$

- **Redundância**

$$x+\bar{x}\cdot y=x+y \qquad\qquad x\cdot(\bar{x}+y)=x\cdot y$$

- **Consenso:**

$$x\cdot y+y\cdot z+\bar{x}\cdot z=x\cdot y+\bar{x}\cdot z$$

$$(x+y)\cdot(y+z)\cdot(\bar{x}+z)=(x+y)\cdot(\bar{x}+z)$$



Sistemas Digitais

## Álgebra de Boole Binária

Leis de Morgan

$$\overline{x+y}=\bar{x}.\bar{y}$$

$$\overline{x.y}=\bar{x}+\bar{y}$$

**Permitem transformar uma soma de produtos num produto de somas e vice-versa**

**Verificação por Tabelas de Verdade**

| x y | x + y | $\overline{x+y}$ | x y | $\bar{x}$ $\bar{y}$ | $\bar{x}.\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 0 | 1 | 0 0 | 1 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 1 | 1 0 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 | 1 0 | 0 1 | 0 |
| 1 1 | 1 | 0 | 1 1 | 0 0 | 0 |

**Generalização para n variáveis**

$$\overline{x_1+x_2+\ldots+x_n}=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n$$

$$\overline{x_1\cdot x_1\ldots x_n}=\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_n$$

Sistemas Digitais

# Álgebra de Boole Binária

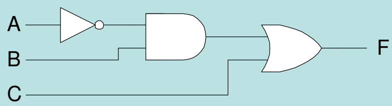
## Representação de Funções

**Por função Booleana:**

$$f = \bar{a}\,b + c$$

āb e c são os **termos** da função.
ā, b e c são os **literais**.

**Por Circuito Lógico (ou Logigrama):**




**Por Tabela de Verdade:**

| a | b | c | ā b | f |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |



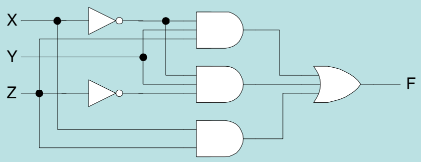
Sistemas Digitais

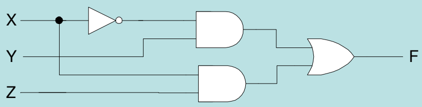
# Álgebra de Boole Binária

## Funções mais de 2 variáveis

Exemplo de Simplificação e Representação sob a forma de Logigrama:

$$f = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz$$
$$= \bar{x}y\left(z + \bar{z}\right) + xz$$
$$= \bar{x}y.1 + xz$$
$$= \bar{x}y + xz$$



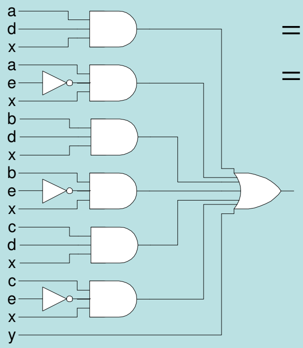



Sistemas Digitais

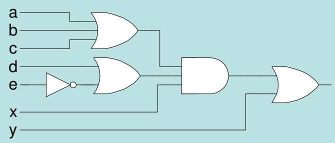
# Álgebra de Boole Binária

## Exemplo de Simplificação (II)

$$
\begin{aligned}
f &= adx + a\bar{e}x + bdx + b\bar{e}x + cdx + c\bar{e}x + y \\
&= \left(ad + a\bar{e} + bd + b\bar{e} + cd + c\bar{e}\right)x + y \\
&= \left(\left(a+b+c\right)d + \left(a+b+c\right)\bar{e}\right)x + y \\
&= \left(\left(a+b+c\right)\left(d+\bar{e}\right)\right)x + y
\end{aligned}
$$




**Realização a 2 níveis (soma de produtos)**




**Realização Multinível**



Sistemas Digitais

# Álgebra de Boole Binária

## Especificação por tabela: Importância das funções AND, OR e NOT)

| A | B | C | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

$$f_1 = ABC$$

$$f_2 = AB\overline{C}$$

$$f_3 = A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$f = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

- É sempre possível definir uma função utilizando o conjunto {AND, OR, NOT}

## Álgebra de Boole Binária

### Especificação por soma de mintermos

O método anterior permitiu igualmente a passagem da representação de uma função por uma tabela para uma expressão algébrica.

Essa expressão é uma soma de produtos em que todos os produtos envolvem todas as variáveis da função.

| m | A | B | C | f |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

- A estes produtos chama-se **mintermos**
- A expressão em termos de soma de mintermos é única
- A esta expressão também se chama 1ª forma canónica ou forma canónica normal disjuntiva
- Cada mintermo corresponde a um dos 1s da função

É usual referir cada mintermo pelo número correspondente em binário

Assim: $f = m_4 + m_6 + m_7 \Leftrightarrow f = \sum m(4,6,7)$





## Álgebra de Boole Binária

### Especificação por produtos de maxtermos

Em vez de se trabalharem com 1s, também é possível construir a expressão da função através dos seus 0s

Essa expressão é um produto de somas em que todas as somas envolvem todas as variáveis da função.

$$g = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})$$

| M | A | B | C | g |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

- A cada uma das somas chama-se **maxtermo**
- A esta expressão também se chama 2ª forma canónica ou forma canónica normal conjuntiva
- Cada maxtermo corresponde a um dos 0s da função

É usual referir cada maxtermo pelo número correspondente em binário

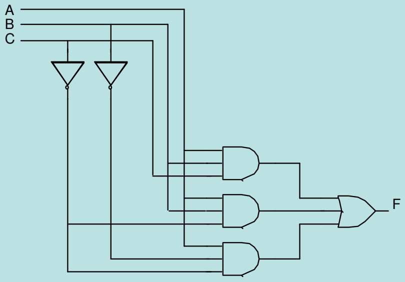
Assim: $g = M_0.M_1.M_2.M_3.M_5 \Leftrightarrow f = \prod M(0,1,2,3,5)$

# Álgebra de Boole Binária

## Especificação da 1ª forma canónica por logigrama

| A | B | C | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$




- Cada mintermo é representado por uma das portas AND
- Existe uma correspondência entre cada AND, cada um dos 1s da tabela e cada um dos produtos da expressão





# Álgebra de Boole Binária

## Importância das funções NAND e NOR

- Como vimos, qualquer função pode ser representada como uma soma de mintermos. Por exemplo:

$$f = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

- Aplicando uma dupla negação à expressão:

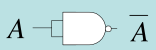
$$f = \overline{\overline{ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}}}$$

- Aplicando as Leis de Morgan:

$$f = \overline{\overline{ABC}\cdot\overline{AB\overline{C}}\cdot\overline{A\overline{B}\,\overline{C}}}$$

- Obtém-se uma expressão em que só surgem NANDs e NOTs. Como um NOT pode ser feito com um NAND, então **qualquer função pode ser implementada só com NANDs**

$$\overline{A\cdot A} = \overline{A}$$




O mesmo se aplica aos NORs (basta partir da 2ª forma canónica)

# Álgebra de Boole Binária

## Manipulação e Simplificação de Funções

A manipulação de uma função pode ser feita para obter uma expressão mais simples ou para obter a expressão em certas formas:

- Simplificar

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{A}\bar{B}C + AC + BC \\
&= \left(\bar{A}\bar{B} + A + B\right)C \\
&= \left(\bar{B} + A + B\right)C \\
&= 1C \\
&= C
\end{aligned}
$$

- Obter expressão com operadores de 2 variáveis e negações

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}\bar{C}D + ACD + A\bar{B}\bar{D} \\
&= \bar{A}\left(\bar{B}D + \bar{C}D\right) + A\left(CD + \bar{B}\bar{D}\right)
\end{aligned}
$$

- Obter expressão só com NANDS

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}\bar{C}D + ACD + A\bar{B}\bar{D} \\
&= \overline{\overline{\bar{A}\bar{B}D} \cdot \overline{\bar{A}\bar{C}D} \cdot \overline{ACD}\ \overline{A\bar{B}\bar{D}}}
\end{aligned}
$$