3. Cálculo integral em $\mathbb{R}$

3.1. Integral Indefinido

3.1.1. Definição, Propriedades e Exemplos

A noção de *integral indefinido* aparece associada à de derivada de uma função como se pode verificar a partir da sua definição:

Definição 1 *Dado o intervalo* $]a,b[$ *e a função* $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$*, o integral indefinido (ou primitiva) de* f *é uma função* $F :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *com a propriedade seguinte:*

$$F'(x) = f(x), \;\; x \in]a,b[.$$

Ou seja, dada uma função f*, o* ***integral indefinido*** *de* f *(ou a primitiva* f*) é uma função* F *cuja derivada é* f*.*

Representamos o integral indefinido (ou primitiva) de f *por*

$$\int f dx \;\; ou \;\; Pf$$

Exemplo 1.

1.1. $\int 5 \, dx = 5x$ **1.2.** $P(2x) = x^2$

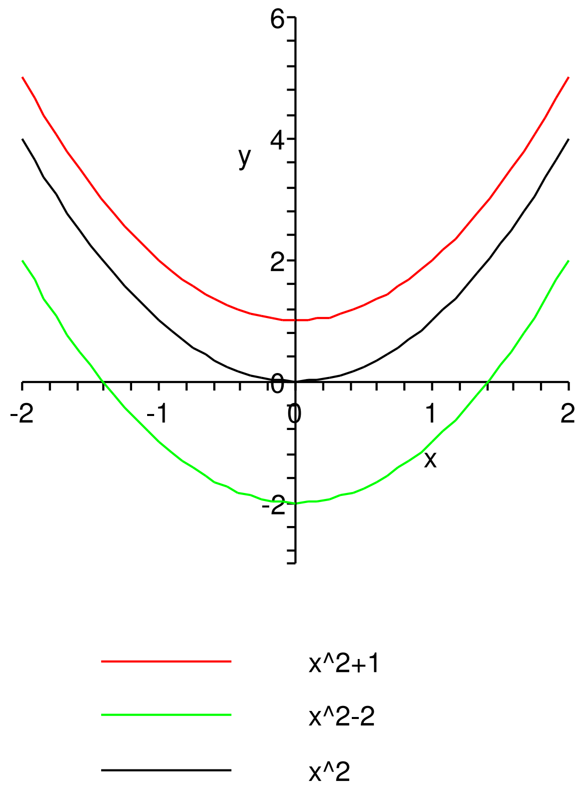
1.3. $\int e^{2x} dx = \dfrac{e^{2x}}{2}$ **1.4.** $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(x)$

Observemos que o integral indefinido (ou primitiva) de uma função não é único. De facto, se $F(x)$ é integral indefinido de $f(x)$ então $F(x) + c$ também o é ($c \in \mathbb{R}$).

A última expressão é a **expressão geral das primitivas de** f.

Por exemplo: x^2 , x^2+1 , x^2-2 são primitivas da função $f(x) = 2x$.

Isto significa que quando calculamos a primitiva de uma função obtemos uma *família de funções*, cujos elementos diferem entre si por uma constante. Geometricamente, diferem entre si apenas de uma *translação vertical*.



De referir também que, como consequência da definição, *derivar* e *integrar* são operações inversas. Isto é:

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$$

Conhecidas as regras de derivação, podemos desde já estabelecer propriedades para a primitivação:

1. $P(f(x)+g(x)) = Pf(x) + Pg(x)$

2. $P(kf(x) = kP(f(x)), k \in \mathbb{R}$

Tendo em conta a definição de primitiva e o conjunto de derivadas já conhecidas podemos calcular, por exemplo:

$$\begin{aligned} P(x^2+2x-1) &= P(x^2)+P(2x)-P(1) = P(\tfrac{1}{3}3x^2)+x^2-x = \\ &= \tfrac{1}{3}P(3x^2)+x^2-x = \tfrac{1}{3}x^3+x^2-x+C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

E portanto:

$$P(x^2+2x-1) = \tfrac{1}{3}x^3+x^2-x+C, C \in \mathbb{R}.$$

Repare-se, novamente, que para a resposta estar completa, há a necessidade de somar à expressão final uma constante para que sejam indicadas *todas* as primitivas da função em causa.

Em exercícios concretos, poderemos estar interessados apenas numa das primitivas. Neste caso, dizemos que estamos a procurar uma solução particular e é necessário uma condição adicional para o cálculo da constante C. Estes são os **problemas de valor inicial**.

Exemplo 2. Determine $F(x)$, sabendo que $F'(x) = 2x - 2$ e que $F(1) = 2$.

Resolução:

$\bullet F(x) = \int (2x-2)\,dx = x^2 - 2x + C, C \in \mathbb{R}.$

$\bullet F(1) = 2 \Rightarrow F(1) = 1^2 - 2(1) + C = 2 \Rightarrow C = 3.$

Logo, a solução particular deste problema é

$$F(x) = x^2 - 2x + 3 \ .$$

Exemplo 3. O custo marginal de fabrico de x unidades de um produto tem como modelo

$$\frac{dC}{dx} = 32 - 0,04x \ .$$

A produção de uma unidade custa 50ε. Calcule o custo total de produção de 200 unidades.

Resolução:

Comecemos por determinar a função custo, integrando a função custo marginal:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (32 - 0,04x)dx = 32x - 0,04\,\frac{x^2}{2} + k = \\ &= 32x - 0,02x^2 + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Isto é:

$$C(x) = 32x - 0,02x^2 + k, k \in \mathbb{R}$$

Dada a condição inicial $C(1) = 50$, podemos calcular a constante a:

$$C(1) = 32 \times 1 - 0,02(1)^2 + k = 50 \Leftrightarrow k = 18,02 \ .$$

Assim, a função custo total é : $C(x) = 32x - 0,02x^2 + 18,02$.

Então, o custo de produção de 200 unidades é de

$$C(200) = 32 \times 200 - 0,02(200)^2 + 18,02 = 5618,02 \ .$$

3.1.2. Integral Indefinido Imediato

Dizemos que uma função tem *integral indefinido imediato* se o podemos calcular imediatamente considerando apenas as derivadas de funções já conhecidas, ou após algumas manipulações algébricas simples.

Vejamos alguns exemplos, onde aplicaremos o conhecimento derivadas de algumas funções já conhecidas:

Exemplo 4:

4.1. Potências $\displaystyle\int f'(x)f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c \ , \ c \in \mathbb{R} \ , \ n \neq 1$.

$$\begin{aligned}\int x(3-4x^2)^2 \, dx &= -\frac{1}{8}\int \underbrace{-8x}_{f'} \underbrace{(3-4x^2)^2}_{f^n} \, dx = \\ &= -\frac{1}{8}\frac{(3-4x^2)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

4.2. Função exponencial $\displaystyle\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int 5xe^{-x^2}\,dx &= \frac{5}{-2}\int \underbrace{-2x}_{f'}\underbrace{e^{-x^2}}_{e^f}dx = \\ &= -\frac{5}{2}e^{-x^2} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

4.3. Função logarítmica $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x-1}\,dx &= \int \frac{1}{2}\frac{\overbrace{2}^{f'}}{\underbrace{2x-1}_{f}}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2}^{f'}}{\underbrace{2x-1}_{f}}\,dx = \frac{1}{2}|\ln(2x-1)| + k, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3.1.3. Integral Indefinido Por Partes

Nesta secção abordaremos uma técnica de primitivação que é consequência directa da regra de derivação do produto. Já sabemos que se $f(x), g(x)$ são duas funções então a derivada do produto é dada por:

$$(fg)' = f'g + fg'\ .$$

Desta propriedade conclui-se, imediatamente, que

$$fg = P(f'g + fg')\ .$$

Então, podemos considerar as equivalências:

$$\begin{aligned} fg = P(f'g + fg') \;&\Leftrightarrow\; fg = P(f'g) + P(fg') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; P(f'g) = fg - P(fg') \end{aligned}$$

A última igualdade é a fórmula da **primitivação por partes** ou **integração por partes**:

$$P(f'g) = fg - P(fg') \tag{1}$$

Esta técnica é utilizada sempre que a função a integrar (a *função integranda*) seja produto de duas funções f, g, em que f deverá ser fácil de integrar e g fácil de derivar.

Exemplo 5:

$$\begin{aligned} \int \ln(x)x\,dx &= \int \underbrace{\ln(x)}_{f}\underbrace{x}_{g'}\,dx = \underbrace{ln(x)}_{f}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g}\,dx = \\ &= \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \\ &= \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\int \ln(x)x\,dx = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c, c \in \mathbb{R}$$

3.2. Integral Definido

3.2.1. Definição

Definição 2 *Seja f uma função não negativa e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A área delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos $XX's$ e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é representada por*

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

A expressão $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é o integral definido de f de a a b; a é o limite de inferior de integração e b é o limite superior de integração.

Suponhamos que é dada uma função $f(x)$ tal que

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c\ .$$

Então, a forma de cálculo do integral definido de f é-nos dada pelo seguinte teorema

Teorema 1 ***Teorema Fundamental do Cálculo Integral***

Se f é não-negativa e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Até agora consideramos apenas funções não-negativas. O Teorema Fundamental do Cálculo Integral estabelece a forma de cálculo do integral definido e, no caso mais geral, não se garante que o seu valor seja não-negativo. Nos casos em que f é uma função com valores negativos, o integral definido pode ser positivo, nulo ou negativo e, por isto, nem sempre ser representativo da área atrás referida.

Exemplo 6:

6.1 $\displaystyle\int_1^5 3x^2\, dx = \left[x^3\right]_1^5 = 5^3 - 1^3 = 125 - 1 = 124$

6.2 $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^{2\times 1}}{2} - \frac{e^{2\times 0}}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^1}{2} = \frac{e^2 - e}{2}$

6.3 $\displaystyle\int_a^b ke^x\, dx = \left[ke^x\right]_a^b = ke^b - ke^a = k(e^b - e^a)$

6.4 $\displaystyle\int_1^2 \ln(x) \cdot x\, dx = \left[\ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$

$$= \left(\ln(2)\frac{2^2}{2} - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\ln(1)\frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{4}\right) =$$

$$= (2\ln(2) - 1) - \left(0 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

Exemplo 7: O lucro marginal de um produto tem como modelo

$$P'(x) = \frac{dP}{dx} = -0,0005x + 12,2 \ .$$

Calcule a variação do lucro quando as vendas aumentam

7.1. de 100 para 101 unidades

7.2. de 100 para 110 unidades.

Resolução:

7.1. A variação do lucro com um aumento nas vendas de 100 para 101 unidades é

$$\begin{aligned}\int_{100}^{101} \frac{dP}{dx} &= \int_{100}^{101} (0,0005x + 12,2)dx = \\ &= [-0,00025x^{x} + 12,2x]_{100}^{101} \approx 12,15\end{aligned}$$

7.2. A variação do lucro com um aumento nas vendas de 100 para 110 unidades é

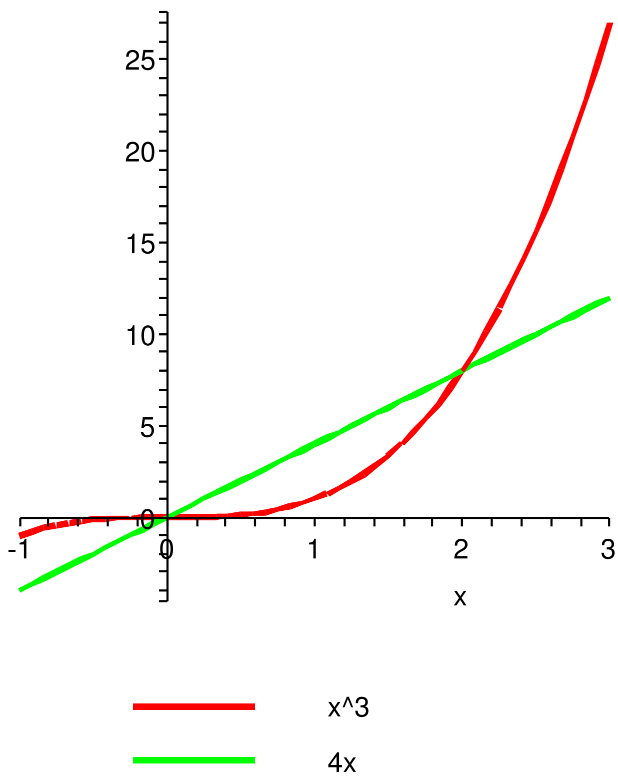
$$\begin{aligned}\int_{100}^{110} \frac{dP}{dx} &= \int_{100}^{110} (0,0005x + 12,2)dx = \\ &= [-0,00025x^{x} + 12,2x]_{100}^{110} \approx 121,48\end{aligned}$$

3.2.2. Aplicações do Integral Definido

Uma das aplicações do integral indefinido é o cálculo da área da região limitada pelos gráficos de duas, ou mais, funções.

Exemplo 8: Calcule a área da região limitada pelos os gráficos das funções $f(x) = 4x$ e de $g(x) = x^3$, para $x \in [0, 2]$.

Resolução: Temos



$$\int_0^2 \left(4x - x^3\right)\, dx \;=\; \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4}\right) =$$

$$= \;(8 - 4) - 0 = 4$$

Propriedades do Integral Definido:

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$, se $a < b < c$

4. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, se $k \in \mathbb{R}$.

Outra aplicação importante do integral definido é o calculo do valor médio de uma função num dado intervalo.

Dada uma função $f(x)$, o valor médio de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\overline{f(x)} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Exemplo 9: O custo unitário de produção de um produto durante um período de 2 anos tem o modelo

$$c(t) = 0.005t^2 + 0.01t + 13.15\ ,\ 0 \leq t \leq 24\ ,$$

onde t é expresso em meses. Calcule uma aproximação do custo médio unitário nesse período de 2 anos.

Resolução: O custo médio é obtido por integração de $c(t)$ ao longo do intervalo pretendido, que neste caso é $[0, 24]$.

Assim:

$$\begin{aligned}
\overline{c(x)} &= \frac{\displaystyle\int_0^{24} (0,005t^2 + 0,01t + 13,15)\, dt}{24 - 0} = \\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{0,005t^3}{3} + \frac{0,01t^2}{2} + 13,15t\right]_0^{24} = \\
&= \frac{1}{24}\left(\frac{0,005 \times 24^3}{3} + \frac{0,01 \times 24^2}{2} + 13,15 \times 24 - 0\right) = 14,23
\end{aligned}$$

3.3. Exercícios

1. Calcule:

(a) $\int \ln(x)\, dx$ (b) $\int xe^x\, dx$ (c) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$ (d) $\int x^2 e^x\, dx$

(e) $\int \left(\frac{9}{y^4}\right) dy$ (f) $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ (g) $\int 2x^3\sqrt{x}\, dx$ (h) $\int (2t^2-1)^2\, dt$

(i) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$ (j) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$ (k) $\int \frac{1}{v\sqrt{v}}\, dv$ (l) $\int \frac{1}{2x^3}\, dx$

(m) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$ (n) $\int \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$ (o) $\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$ (p) $\int u(3u^2+1)\, du$

2. Resolva os problemas de valor inicial seguintes:

(a) $f'(x) = 3\sqrt{x} + 3,\ f(1) = 4$ (b) $f'(x) = 6x(x-1),\ f(1) = -1$

(c) $f'(x) = \frac{2-x}{x^2},\ x > 0,\ f(2) = \frac{3}{4}$ (d) $f'(x) = -\frac{5}{(x-a)^2},\ x \neq 2,\ f(7) = 1$

3. Uma empresa fabrica um produto para o qual o custo marginal de produção de x unidades é

$$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 2x - 12\ ,$$

e os custos fixos são 125.

(a) Calcule a função custo total e a função custo médio.

(b) Determine o custo total da produção de 50 unidades.

(c) Em (b), qual a parcela fixa do custo total? Qual a parcela variável?

4. A taxa de crescimento da população de uma cidade tem como modelo

$$\frac{dP}{dt} = 500t^{1,06}\ ,$$

onde t é o tempo em anos. A população da cidade é, no momento, de 50.000 habitantes. Qual será a população daqui a 10 anos?

5. O consumo S de gás natural aumentou, entre 1986 e 1992 a uma taxa dada pelo modelo

$$\frac{dS}{dt} = 0,175t^2 + 0,4t + 0,81,\ \ 0 \leq t \leq 6\ ,$$

onde $t = 0$ representa 1986. Em 1986 o consumo foi de $16,7$. Determine um modelo para o consumo entre 1986 e 1992 e determine o consumo em 1992.

6. Calcule:

$$(a) \int 2(1+2)^4\ dx \quad (b) \int (x-3)^{\frac{5}{3}}\ dx \quad (c) \int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\ dx \quad (d) \int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3}\ dx$$

$$(e) \int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx \quad (f) \int \frac{t+2t^2}{\sqrt{t}}\ dt \quad (g) \int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 \left(\frac{1}{t^2}\right)\ dt \quad (h) \int (x^3+3x)(x^2+1)\ dx$$

7. O custo marginal de um produto tem como modelo

$$\frac{dC}{dx} = \frac{12}{\sqrt[3]{12x+1}}\ .$$

Sabe-se que $C(13) = 100$.

(a) Determine a função custo.

(b) Esboce os gráficos de $C(x)$ e de $C'(x)$ no mesmo sistema de eixos.

8. A taxa $\dfrac{dQ}{dt}$ à qual uma empresa paga um empréstimo ao banco é proporcional ao quadrado de $50 - t$, onde t é o tempo, em meses, e $0 \leq t \leq 50$. $Q(t)$ representa o que falta ser pago no mês t. Suponha que o empréstimo é de 10.000 euros e que deverá estar totalmente pago no 50º mês.

(a) Qual o valor do 1º pagamento? E do último?

(b) Qual o valor do 10º pagamento?

(c) Qual o montante em dívida após 25 meses?

(d) Que instante que corresponde ao pagamento de metade da dívida?

9. Calcule:

$$(a) \int 2e^{2x}\ dx \quad (b) \int 9te^{-t^2}\ dt \quad (c) \int \left(x^2+2x\right) e^{x^3+3x^2-1}\ dx \quad (d) \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\ dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x+1}\ dx \quad (f) \int \frac{y}{3-2y}\ dy \quad (g) \int \frac{x+3}{x^2+6x+7}\ dx \quad (h) \int \frac{1}{v^3} e^{\frac{1}{4v^2}}\ dv$$

10. De 1986 a 1992, o númerto T de transacções em caixas multibanco nos EUA variou segundo a taxa

$$\frac{dT}{dt} = 23,33t^{\frac{3}{2}} - 7,89t^2 + 44,71e^{-t} \ ,$$

onde $t = 0$ corresponde a 1986. Em 1992 ocorreram 600 milhões de transacções.

(a) Estabeleça um modelo que nos forneça o número total de transacções.

(b) Aplique o modelo para determinar o número de transacções em 1988 e em 1990.

11. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^x$ (b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2}x^2 \ dx$ (c) $\displaystyle\int_2^4 \left(x^3 - 6x^2\right) dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\left(x^2+6\right) dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(ax^2+bx+c\right) dx$ (f) $\displaystyle\int_1^3 3\sqrt{x} \ dx$

(g) $\displaystyle\int_4^2 x^2\left(\frac{1}{3}x^3+1\right) dx$ (h) $\displaystyle\int_1^2 e^{-2x} \ dx$ (i) $\displaystyle\int_2^3 \left(e^{2x}+e^x\right) \ dx$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^{e-2} \frac{1}{x+2} \ dx$ (k) $\displaystyle\int_e^6 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}\right) \ dx$ (l) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \ dx$

12. Calcule os integrais seguintes e faça um esboço da área que esse integral representa:

(a) $\displaystyle\int_1^3 (4x-3) \ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}(1-t) \ dt$ (c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3v^2}{v^3-1} \ dv$ (d) $\displaystyle\int_0^{\ln(6)} \frac{e^x}{2} \ dx$

13. Sejam $\displaystyle\int_0^5 f(x) \ dx = 8$ e $\displaystyle\int_0^5 g(x) \ dx = -1$. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^5 [f(x)+g(x)] \ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^5 -4f(x) \ dx$ (c) $\displaystyle\int_0^5 (f(x)-2g(x)) \ dx$ (d) $\displaystyle\int_0^5 g(x) - \frac{1}{4}f(x) \ dx$

14. O custo de aquisição e manutenção de uma peça de equipamento durante x anos admite o modelo

$$C(x) = 5000\left(25 + 3\int_0^x t^{\frac{1}{4}} \ dt\right).$$

Determine o custo total após 1 ano, 5 anos e 10 anos.

15. Uma empresa adquire uma máquina para a qual a taxa de desvalorização é de

$$\frac{dV}{dt} = 10000(t-6),\ 0 \leq t \leq 5\ ,$$

onde V é o valor da máquina após t anos. Estabeleça e calcule o integral definido que dá a perda total de valor da máquina durante os primeiros 3 anos.

16. Faz-se um depósito de 2500 euros numa conta poupança com uma taxa anual de 4% composta continuamente. Determine o saldo médio da conta durante os primeiros 5 anos.

17. Nos EUA, a taxa anual de mortalidade R (em mortes por 1000 pessoas de idade x) tem como modelo

$$R(x) = 0,036x^2 - 2,8x + 58,14,\ 40 \leq x \leq 60\ .$$

Calcule a taxa média de mortalidade para pessoas entre os 40 e os 50 anos e para pessoas entre os 50 e os 60 anos.

18. O consumo total de combustivel para transporte nos EUA, de 1950 a 1979, admite o modelo

$$f(t) = 0,000433t^2 + 0,0962t + 2,76,\ -20 \leq t \leq 9\ ,$$

onde $t = 0$representa 1970. Como consequência do aumento de preços verificado em 1979, o consumo baixou e passou a seguir o modelo

$$g(t) = 0,00831t^2 + 0,152t + 2,81,\ 9 \leq t \leq 16\ .$$

Determine a economia de combustível entre 1979 e 1986, por mudança nos padrões de consumo.

19. Faça um esboço da área delimitada pelos gráficos e determine-a:

(a) $f(x) = x^2 - 4x\ ,\ g(x) = 0$

(b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2\ ,\ g(x) = x + 2$

(c) $f(x) = x^2 - x, g(x) = 2(x+2)$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = x$

(e) $y = x^2 - 4x + 3\ ,\ y = 3 + 4x - x^2$

(f) $f(y) = y(2-y)\ ,\ g(y) = -y$

(g) $f(x) = e^{0.5x}\ ,\ g(x) = -\dfrac{1}{x}\ ,\ x = 1\ ,\ x = 2$

(h) $y = \dfrac{8}{x}\ ,\ y = x^2\ ,\ x = 1\ ,\ x = 4$