Distribuições contínuas

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Distribuição Normal

Diz-se que uma variável aleatória X tem distribuição normal, se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

onde μ e σ são os parâmetros da distribuição que obedecem a: $\sigma > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$
Uma vez conhecidos estes parâmetros, a distribuição da v. a. X fica completamente definida e escreve-se

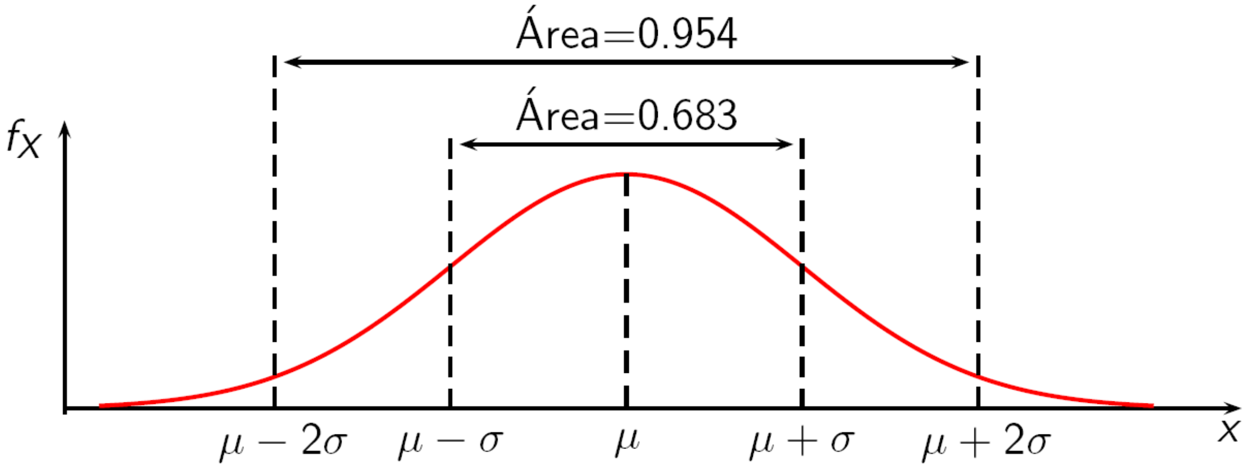
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Tem-se

$$E(X) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \sigma^2$$

Curva de Gauss

O gráfico da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ é a famosa curva em forma de sino, também dita curva de Gauss ou curva normal, abaixo representada.



Note que $P(X < \mu) = P(X > \mu)$

Características da Curva de Gauss

- A curva é simétrica relativamente à recta vertical que passa pelo ponto $(\mu, 0)$;
- A curva prolonga-se de $-\infty$ *a* $+\infty$ e nunca toca no eixo das abcissas (este eixo é uma assimptota);
- A curva tem dois pontos de inflexão de abcissas: $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$;
- Aos intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma), (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ *e* $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ correspondem, respectivamente, 68%, 95% e 99.7% da área total sob a curva da função densidade:

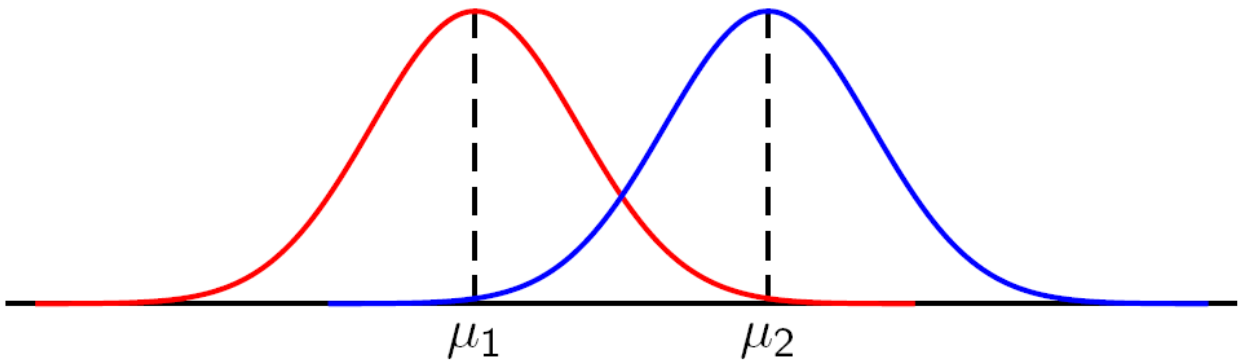
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

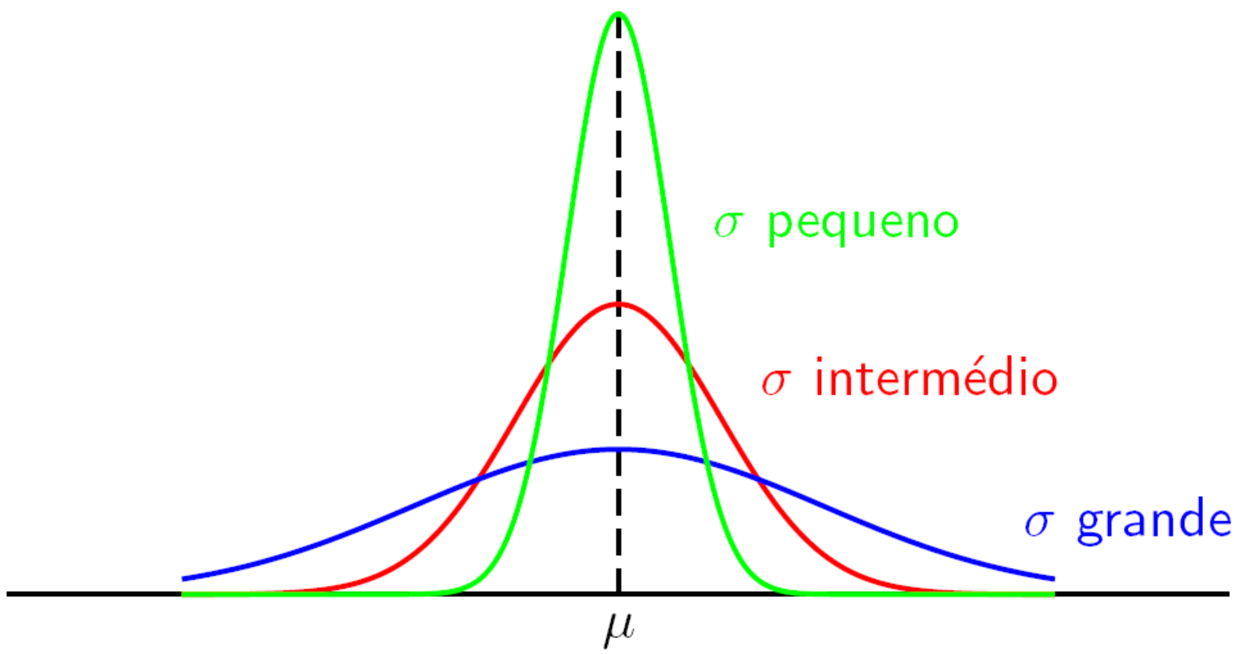
Curva de Gauss

Distribuições normais com iguais desvios padrões mas com médias diferentes.



Curva de Gauss

Distribuições normais com médias iguais mas com desvios padrões diferentes.



Normal Padronizada

Uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e desvio padrão igual a um é dita uma variável aleatória normal estandardizada, reduzida ou padronizada: $Z \sim N(0, 1)$

Estandardização da v. a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (mudança de origem e de escala):

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Exemplo

Seja $X \sim N(2, 0.5^2)$. Calcule: $P(X < 2.4)$ e $P(1.8 < X < 2.5)$.

Sol:$P(X < 2.4) = 0.7881$ e $P(1.8 < X < 2.5) = 0.4967$

Teorema da Aditividade da Distribuição Normal

Teorema

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição normal de média μ_i e variância σ_i^2 (i=1,...,n).

Então a variável aleatória

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \qquad com\ a_i \in R\ (i = 1, ..., n),$$

tem distribuição normal de média

$$\mu_X = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + ... + a_n\mu_n$$

e variância

$$\sigma_X^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$$

Teorema da Aditividade da Distribuição Normal

Exemplo

Suponha que é gestor de uma empresa que desenvolve software por encomenda. Estudos recentes indicam que são 4 as fases principais da criação de um novo software. Os valores esperados (em dias) e o respectivo desvio-padrão são os indicados na tabela:

Actividade	Valor Esperado	Desvio-Padrão
Reunir com o cliente	5	1.6
"Desenhar"o sistema	8	3
Fazer o código	10	3.3
Testar o software	6	2.2

Admita que o tempo gasto naquelas fases segue uma distribuição normal. Se assinar um contrato com um cliente que estipule uma grande penalização no caso de não entregar o software num período máximo de 40 dias calcule a probabilidade de pagar essa penalização.

Sol.: 0.0174

Aproximação da Distribuição Binomial à Normal

Para n suficientemente grande, a distribuição binomial de parâmetros n e p pode aproximar-se à distribuição normal com a mesma média, np, e a mesma variância, npq.
Isto é, sendo X uma v. a. com distribuição $B(n, p)$ e n suficientemente grande, então,

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \dot{\sim} N(0, 1)$$

Na prática fazemos esta aproximação quando $\mathbf{n > 20}$ e tanto np como nq são superiores a 5.

Aproximação da Distribuição Binomial à Normal

Correcção de continuidade

$X \sim B(n, p)$ e $Y \sim N(np, npq)$

- $P(X = k) \cong P(k - 0.5 \leq Y \leq k + 0.5)$;
- $P(X \geq k) \cong P(Y > k - 0.5)$;
- $P(X > k) \cong P(Y > k + 0.5)$;
- $P(a \leq X \leq b) \cong P(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$;
- $P(a < X < b) \cong P(a + 0.5 \leq Y \leq b - 0.5)$.

Aproximação da Distribuição Binomial à Normal

Exemplo

Um avião pode acomodar 300 passageiros, 30 dos quais em 1ª classe e 270 em classe turismo. A companhia aérea reservou 30 lugares em 1ª classe e 300 em turismo. Sabendo que a probabilidade de não comparecimento de quem faz reserva é de 0.15, qual é a probabilidade de que todos os passageiros que comparecem sejam acomodados, se os lugares em 1ª classe puderem ser utilizados pelos passageiros de turismo?

Sol.: 0.999

Distribuição t de Student

Uma variável aleatória X tem distribuição t de Student com n graus de liberdade se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2))}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

onde $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$

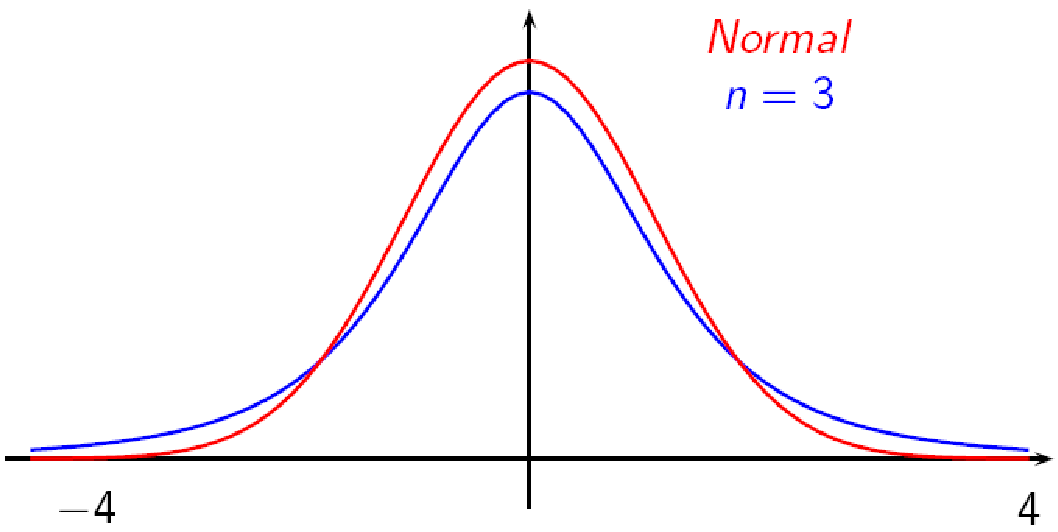
Escreve-se abreviadamente $X \sim t_n$ e tem-se

$$E(X) = 0 \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \frac{n}{n-2}, \quad \text{para } n > 2$$

Distribuição t de Student

O gráfico da função densidade da distribuição t_n é semelhante ao da distribuição normal reduzida - $N(0,1)$. Nomeadamente, a distribuição t_n, tal como a distribuição $N(0,1)$, é simétrica em relação à recta $x = 0$.

À medida que n tende para infinito a curva em sino da distribuição t_n aproxima-se da curva da distribuição $N(0,1)$.



Distribuição do Qui-Quadrado

Uma variável aleatória X tem distribuição do Qui-Quadrado com n graus de liberdade (χ^2_n) se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{e^{-x/2} x^{(n/2)-1}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}, \quad x > 0$$

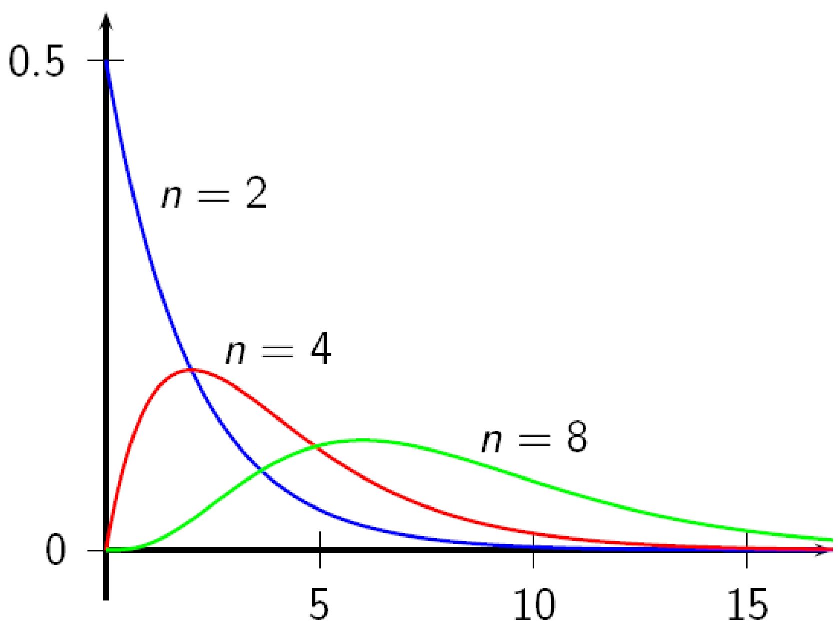
onde $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$

Escreve-se abreviadamente $X \sim \chi^2_n$ e tem-se

$$E(X) = n \qquad \text{e} \qquad Var(X) = 2n$$

Distribuição do Qui-Quadrado

A distribuição é não negativa e assimétrica positiva. Apesar disso, quando n tende para infinito a distribuição torna-se cada vez mais simétrica e aproxima-se da distribuição normal.



Distribuição F-Snedcor

A distribuição F-Snedcor pode ser definida como a razão entre duas variáveis aleatórias independentes e com distribuição do Qui-Quadrado, cada uma dividida pelos respectivos graus de liberdade.

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, com distribuição do Qui-Quadrado com n_1 e n_2 graus de liberdade, respectivamente. A variável aleatória

$$X = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$$

segue uma distribuição que se designa por distribuição F-Snedcor com n_1 e n_2 graus de liberdade (n_1 são ditos os graus de liberdade do numerador e n_2 os graus de liberdade do denominador).

Escreve-se abreviadamente $X \sim F_{n_1}^{n_2}$ ou $X \sim F_{n_1,n_2}$

Distribuição F-Snedcor

A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} x^{n_1/2-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \quad x > 0$$

onde $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$

Distribuição F-Snedcor