departamento de matemática	Escola Superior de Tecnologia de Viseu **Fundamentos de Estatística –** 2006/2007 Ficha nº 2

1. Lançam-se ao acaso 2 moedas.
   a) Escreva o espaço de resultados da experiência.
   b) Descreva os acontecimentos elementares.
   c) Represente os acontecimentos:
      A= {sair uma face}
      B= {sair no máximo uma face}
      C= {sair pelo menos uma face}

2. Lança-se ao acaso uma moeda 4 vezes e conta-se o número de faces obtidas. Escreva o espaço amostral da experiência.

3. Suponha que está a concorrer para 2 vagas de uma empresa com mais 3 colegas seus: o João, a Rosa e o Inácio.
   a) Qual o espaço de resultados dos colocados no concurso.
   b) Calcule as probabilidades das alíneas seguintes utilizando a definição clássica ou frequencista, consoante lhe pareça mais adequado:
      i) Admita que os 4 candidatos têm iguais possibilidades de ficar colocados, diga qual é a probabilidade de os 2 lugares serem ocupados por si e pela Rosa.
      ii) Admita que nessa empresa nunca admitiram uma mulher. Qual é a probabilidade de a Rosa ser colocada.

4. Para cada uma das seguintes situações diga qual a definição de probabilidade que está a ser usada.
   a) Um jogador passa 3 dias num casino a observar uma roleta e a registar o número de vezes que a bola cai em cada "casa" da roleta. No 4º dia o jogador volta ao casino, desta vez para jogar, e aposta sempre no número 20.
   b) Em determinado país o bilhete da lotaria nacional tem um número de 6 algarismos. Quem tiver o bilhete com o número premiado ganha $100 000. Um jogador compra um bilhete cujo número representa o mês, o dia e o ano do seu nascimento.
   c) Suponha que está num banco no final de uma grande fila e repara que um dos 5 empregados que estão a atender é muito simpático. Apercebe-se imediatamente que a probabilidade de ser atendido por esse empregado é 0.2.

5. Fazem-se lançamentos de uma moeda até sair face pela 1ª vez. Descreva o espaço amostral da experiência.

departamento de matemática

6. As peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosas (D) ou não defeituosas (N). As peças são inspeccionadas e o seu estado é registado. Esta operação repete-se até que duas peças defeituosas apareçam consecutivamente ou quatro peças tenham sido inspeccionadas - o que ocorrer em primeiro lugar.
   a) Descreva o espaço de resultados para esta experiência aleatória.
   b) Represente os seguintes acontecimentos:
      A ≡ “Foram encontradas 3 peças defeituosas”
      B ≡ “Foram encontradas pelo menos 2 peças defeituosas”
      C ≡ “As 3 primeiras peças inspeccionadas eram defeituosas”
      D ≡ “Não foram encontradas mais de 2 peças defeituosas”
   c) Utilize os acontecimentos anteriores para dar exemplos de:
      i) Acontecimentos elementares
      ii) Acontecimentos impossíveis
      iii) Acontecimentos incompatíveis

7. Sejam A,B e C três acontecimentos associados a uma dada experiência aleatória. Encontre expressões para os seguintes novos acontecimentos:
   a) só ocorre A;
   b) ocorre A e B mas não C;
   c) ocorrem os três;
   d) ocorre pelo menos um;
   e) ocorrem pelo menos dois;
   f) exactamente um dos acontecimentos ocorre;
   g) exactamente dois dos acontecimentos ocorrem;
   h) nenhum ocorre;
   i) não mais de dois acontecimentos ocorrem simultaneamente.

8. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10 sendo 3 vermelhas (2,4 e 6), 5 azuis (1,3,7,9 e 10) e duas brancas (5 e 8). Considere a experiência aleatória que consiste na extracção de uma bola da urna (tenha em conta o nº e a cor da bola escolhida).
   a) Construa o espaço de resultados associado a esta experiência aleatória.
   b) Calcule a probabilidade de ocorrência dos seguintes acontecimentos:
      i) sai bola vermelha;
      ii) sai bola ímpar;
      iii) sai bola vermelha e bola ímpar;
      iv) sai bola vermelha e bola par;
      v) sai bola ímpar ou bola branca;
      vi) não sai nem bola azul nem bola par;
      vii) não sai simultaneamente bola azul e bola par;
      viii) sai bola branca mas não sai bola ímpar;
      ix) sai bola branca ou bola par mas não ambas.

9. Considere a extracção, sem reposição de 2 bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, 3 vermelhas e 5 azuis. Calcule a probabilidade de que:
    a) ambas as bolas sejam vermelhas;
    b) ambas as bolas sejam da mesma cor;
    c) a primeira bola seja branca e a segunda azul.

10. Efectuaram-se 4 séries sucessivas de 300 lances cada, de um dado, tendo-se verificado que a face 6 apareceu conforme segue:

    Nos primeiros 300 lances, 37 vezes
    Na segunda série de 300 lances, 55 vezes
    Na terceira, 52 vezes
    Nos últimos 300 lances 54 vezes.

    Verifique que a probabilidade do acontecimento "saída de ponto 6" é 1/6.

11. Em 3 caixas idênticas existem lâmpadas perfeitas, lâmpadas com defeitos tipo A e lâmpadas com defeitos tipo B nas seguintes quantidades:

    Caixa 1: 15 lâmpadas perfeitas e 5 com defeitos tipo A;
    Caixa 2: 10 lâmpadas perfeitas, 4 com defeitos tipo A e 2 com defeitos tipo B;
    Caixa 3: 12 lâmpadas perfeitas e 3 com defeitos tipo B

    a) Retira-se ao acaso uma lâmpada da caixa 2. Calcule a probabilidade de:
        i) a lâmpada ser perfeita;
        ii) a lâmpada não ter defeito tipo A;
        iii) a lâmpada ser perfeita ou ter defeito tipo B.
    b) Retiram-se, sem reposição, 3 lâmpadas da caixa 1. Calcule a probabilidade de:
        i) só uma lâmpada ser defeituosa;
        ii) nenhuma ser defeituosa;
        iii) pelo menos uma lâmpada ser defeituosa.
    c) Selecciona-se uma caixa ao acaso e retiram-se sem reposição 3 lâmpadas dessa caixa.
        i) Calcule a probabilidade de haver pelo menos uma lâmpada com defeito.
        ii) Sabendo que nenhuma lâmpada tinha defeitos calcule a probabilidade de as lâmpadas terem sido retiradas da caixa 1.

12. Sejam A_1 e A_2 dois acontecimentos tais que:

    $$P(A_1|A_2) = 0.2,\ P(\overline{A}_1|\overline{A}_2) = 0.4,\quad P(A_2) = 0.3$$

    Calcule $P(A_2|A_1)$.

departamento de matemática

13. Num estudo de mercado foram inquiridas 500 pessoas de uma determinada cidade. O estudo de mercado tinha por objectivo recolher diversas informações sobre o comportamento do consumidor. Entre as questões do inquérito estava a seguinte:

"Gosta de fazer compras em Centros Comerciais?"

Foram entrevistados 240 homens e 260 mulheres. Responderam "Sim" à questão 136 homens e 222 mulheres.

Escolhendo uma pessoa ao acaso, definem-se os seguintes acontecimentos:

$A \equiv$ "A pessoa é homem"

$B \equiv$ "A pessoa é mulher"

$C \equiv$ "A pessoa gosta de fazer compras em Centros Comerciais"

a) Qual é o complementar do acontecimento $D \equiv$ "A pessoa é homem e gosta de fazer compres em Centros Comerciais"?

b) Calcule a probabilidade do acontecimento D.

c) Calcule as seguintes probabilidades:

i) $P(A \cup \overline{C})$ ii) $P(A \cap B)$ iii) $P(\overline{C} | A)$ iv) $P(\overline{B} \cap \overline{C})$ v) $P(A \cup B \cup C)$

14. Considerem-se 4 cartas numeradas de 1 a 4. Tira-se ao acaso uma carta e suponhamos que existe equiprobabilidade. Considere os seguintes acontecimentos:

A = {a carta retirada é 1 ou 4}

B = {a carta retirada é 1 ou 3}

C = {a carta retirada é 1 ou 2}

Verifique se os 3 acontecimentos são independentes.

15. Na análise de uma amostra de 100 empresas portuguesas de importação e exportação chegou-se à conclusão de que os países africanos de expressão portuguesa são os principais clientes dos nossos produtos. De facto, das empresa analisadas,

40 exportam para Angola (A)

50 exportam para Moçambique (M)

25 exportam para ambos os países.

Calcule a probabilidade de uma das 100 empresas anteriores, escolhida ao acaso, exportar:

a) para pelo menos um dos países;

b) para nenhum dos países;

c) para Angola mas não para Moçambique;

d) para somente um dos países.

16. Numa determinada localidade 60% dos utilizadores da Internet nos seus computadores pessoais fazem-no através da ligação à empresa A, enquanto que os restantes são clientes da empresa B. Após um estudo de opinião de mercado conclui-se que 70% dos utilizadores estão satisfeitos com o serviço. Dos clientes da empresa A, 80% afirmaram estar satisfeitos com o seu serviço.
    a) Qual a percentagem de clientes da empresa B que estão satisfeitos com o seu serviço?
    b) Calcule a percentagem de clientes satisfeitos que são clientes da empresa A.
    c) Determine a percentagem de utilizadores que são clientes da empresa A e que estão satisfeitos com o seu serviço.

17. Sendo $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.7$ determine:
    a) $P(B)$ sendo A e B independentes;
    b) $P(B)$ sendo A e B mutuamente exclusivos;
    c) $P(B)$ sendo $P(A | B) = 0.5$.

18. Considere os acontecimentos A, B e C com probabilidades não nulas. Sabendo que:
    - C é mutuamente exclusivo quer com A quer com B;
    - Dois dos acontecimentos são independentes;
    - $P(A) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.06$, $P(C) = 0.15$

    Calcule $P(A \cup B \cup C)$.

19. Num certo dia um vendedor de camiões tem agendado encontros com 3 clientes interessados em comprar um camião. Da experiência passada ele sabe que a probabilidade de que um cliente compre um camião, depois de lhe serem apresentadas as condições de compra durante um encontro, é de 0.3. Admitindo independência entre as atitudes dos diversos clientes, calcule a probabilidade de que ele naquele dia:
    a) venda 3 camiões;
    b) venda pelo menos 1 camião;
    c) não venda nenhum camião.

20. Uma urna contém 10 bolas das quais 6 são brancas e 4 verdes. Fazem-se 2 extracções sucessivas sem reposição.
    a) Diga qual a probabilidade de sair bola verde na segunda extracção sabendo que na 1ª extracção saiu bola branca.
    b) Diga qual a probabilidade de sair bola branca na 1ª extracção e bola verde na segunda.
    c) Diga qual a probabilidade de sair bola verde na 2ª extracção.
    d) Diga qual a probabilidade de sair bola branca na 1ª extracção.
    e) Calcule as probabilidades referidas nas alíneas anteriores supondo agora que as bolas foram sucessivamente extraídas com reposição.
    f) Que pode dizer relativamente à independência dos acontecimentos: "extracção de bola branca na 1ª tiragem" e "extracção de bola verde na 2ª tiragem", nas situações de extracção com reposição e sem reposição?

21. Uma fábrica de discos dispõe de 3 sectores de produção, A, B e C. Sabe-se que 50% dos discos provêm de A, que em C não há discos defeituosos e que 10% dos discos da fábrica são defeituosos. Sabe-se ainda que 2% dos discos da fábrica provêm de B e são defeituosos. Extrai-se ao acaso um disco da produção da fábrica.
    a) Determine a probabilidade do disco ser defeituoso, sabendo que provêm de A.
    b) Determine a probabilidade do disco não provir de B, sabendo que é defeituoso.
    c) Sabendo que 40% dos discos não defeituosos provêm de C, calcule a probabilidade do disco provir de C.

22. Num stand de venda de automóveis sabe-se que 40 % são de baixa cilindrada e, entre estes, 10% custam mais de 2500 contos. Sabe-se também que 20% são de média cilindrada e que custam menos de 2500 contos. Verificou-se ainda que a probabilidade de um automóvel ser de baixa cilindrada se custou menos de 2500 contos é de 60 %.
    a) Calcule a probabilidade de um automóvel daquele stand custar menos de 2500 contos.
    b) Calcule a probabilidade de um automóvel daquele stand ser de alta cilindrada e custar menos de 2500 contos.

23. Um gerente de uma galeria de arte muito creditada no mercado, está interessado em comprar um quadro de um pintor famoso para posterior venda.

    O gerente sabe que há muitas falsificações deste pintor no mercado e que algumas dessa falsificações são bastante perfeitas o que torna difícil avaliar se o quadro que ele pretende comprar é ou não um original. De facto, sabe-se que há 4 quadros falsos desse pintor para 1 verdadeiro.

    O gerente não quer comprometer o “bom nome” da galeria para a qual trabalha comprando um quadro falso. Para obter mais informação o gerente resolve levar o quadro a um museu de arte e pede para que o especialista do museu o examine. Este especialista garante-lhe que em 90% dos casos em que lhe é pedido para examinar um quadro genuíno daquele pintor, ele identifica-o correctamente como sendo genuíno. Mas em 15% dos casos em que examina uma falsificação do mesmo pintor, ele identifica-o (erradamente) como sendo genuíno.

    Depois de examinar o quadro que o gerente lhe levou, o especialista diz que acha que o quadro é uma falsificação. Qual é agora a probabilidade de o quadro ser realmente uma falsificação?

24. Suponha que está a trabalhar para a empresa ROCKALHADAS Lda. e que é responsável pela organização de um concerto ao ar livre. O sítio onde planeia fazer o concerto está disponível nos dias 1 e 19 de Junho. É do seu conhecimento que se chover o lucro obtido no concerto será muito baixo, sendo por isso muito importante a escolha do dia para fazer o concerto. Através de registos de anos anteriores sabe-se que, para o dia 1 de Junho, 1 em cada 5 são chuvosos, enquanto que para o dia 19 de Junho apenas 1 em cada 3 são chuvosos.

    Para obter mais informação resolve consultar o serviço de meteorologia. Infelizmente este serviço nem sempre acerta na sua previsão. De facto, em 10% dos dias chuvosos o serviço não previu chuva e em 18% dos dias em que não choveu o serviço previu chuva.

    O serviço de meteorologia prevê chuva para o dia 1 de Junho e não prevê chuva para o dia 19 de Junho. Que data deve então escolher para fazer o concerto?

25. Sendo A e B dois acontecimentos quaisquer prove que:

$$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(B) + P(A \cap B).$$

26. Duas urnas com bolas brancas e azuis apresentam a seguinte composição:

Urna I : 6 bolas brancas e 4 azuis

Urna II: 3 bolas brancas e 7 azuis

Escolhe-se uma urna ao acaso e extrai-se dessa urna uma sucessão de 3 bolas.

a) Considerando que as bolas foram retiradas sem reposição, calcule:

i) a probabilidade de sair bola branca na 1ª tiragem, bola azul na 2ª e bola branca na 3ª, sabendo que a urna I foi escolhida.

ii) a probabilidade de sair bola branca na 1ª tiragem, bola azul na 2ª e bola branca na 3ª, sem informação da urna escolhida.

b) Calcule as probabilidades i) e ii) da alínea anterior considerando que houve reposição das bolas retiradas.

SOLUÇÕES DE ALGUNS EXERCÍCIOS

1.a) Ω={FF,CC,FC,CF}

b) {FF}≡ "saída de face na 1º moeda e face na 2º moeda"

{FC}≡ "saída de face na 1º moeda e coroa na 2º moeda"

{CF}≡ "saída de coroa na 1º moeda e face na 2º moeda"

{CC}≡ "saída de coroa na 1º moeda e coroa na 2º moeda"

c) A={FC,CF}; B={CC, FC, CF}; C={FF, CF, FC}

2. Ω={0,1,2,3,4}

3. a) Ω={(Rosa, João), (Rosa, Inácio), (Rosa, Eu), (João, Inácio), (João, Eu), (Inácio, Eu)}

b) i) 1/6 (definição clássica) ii) 0 (definição frequencista)

4. a) Frequencista b) Subjectiva c) Clássica

5. Ω={F, CF,CCF,CCCF,CCCCF, ...}

6. a) Ω={DD, DNDD, DNDN, DNND, DNNN, NDD, NDND, NDNN, NNDD, NNDN, NNND, NNNN}

b) A={DNDD}; B{DD, DNDD, DNDN, DNND, NDD, NDND, NNDD}; C=∅

D={DD, DNDN, DNND, DNNN, NDD, NDND, NDNN, NNDD, NNDN, NNND, NNNN}

c) i) A; ii) C; iii)A e D

7. a) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; b) $A \cap B \cap \overline{C}$; c) $A \cap B \cap C$; d) $A \cup B \cup C$;

e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)$; f) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})$

g) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap C) \cup (C \cap A \cap \overline{B})$; h) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; i) $\overline{A \cap B \cap C}$

8. a) Ω={A1, V2, A3, V4, B5, V6, A7, B8, A9, A10}

b) i) 0.3; ii) 0.5; iii) 0; iv) 0.3; v) 0.6; vi) 0.1; vii) 0.9; viii) 0.1 ix)0.5

9. a) 0.06667; b) 0.31111; c) 0.11111
10. Utilizando a definição frequencista, obtemos as seguintes aproximações para a referida probabilidade:

no final da 1ª série: $\dfrac{37}{300} = 0{,}123$ no final da 2ª série: $\dfrac{92}{600} = 0{,}153(3)$

no final da 3ª série: $\dfrac{144}{900} = 0{,}16$ no final da 4ª série: $\dfrac{198}{1200} = 0.165$

As frequências relativas calculadas aproximam-se de $\dfrac{1}{6} = 0{,}16(6)$.

11. a) i) 0.625; ii) 0.75; iii) 0.75

b) i) 0.4605263; ii) 0.3991; iii) 0.6009

c) i) 0.63443; ii) 0.3639

12. 0.125
13. a) $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{C}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{C}}$

b) 0.272; c) i) 0.556; ii) 0; iii) 0.4333; iv) 0.208; v) 1

14. Não são independentes. De facto, são independentes 2 a 2, pois $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ e $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$ mas os 3 não são independentes pois $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$
15. a) 0.65; b) 0.35; c) 0.15; d) 0.4
16. a) 0.55; b) 0.6857; c)0.48
17. a) 0.4; b) 0.2; c) 0.4
18. 0.59
19. a) 0.027; b) 0.657; c) 0.343
20. a) 0.44444; b) 0.26667; c) 0.4; d) 0.6; e) 0.4 \ 0.24 \ 0.4 \ 0.6;

f) Com reposição os acontecimentos são independentes; sem reposição os acontecimentos não são independentes.

21. a) 0.16; b) 0.8; c) 0.36
22. a) 0.6; b) 0.04
23. 0.97
24. 19 de Junho
26. a) i) 0.16667; ii)0.1125; b) i) 0.144; ii) 0.1035