departamento de matemática	Escola Superior de Tecnologia de Viseu **Fundamentos de Estatística –** 2006/2007 Ficha nº 3

1. Os valores admissíveis de uma variável aleatória discreta X são: 0, 1, 2. Sabe-se que $E(X)=0.8$ e que $E(X^2)=1.4$.

a) Defina a função de probabilidade de X, f_X.

b) Defina a função de distribuição de X.

c) Calcule a probabilidade do acontecimento $\{X > 2Var(X) \mid 1 \leq X \leq 3E(X)\}$.

2. Um importador de bananas tem a possibilidade de comprar um carregamento de bananas por 600 dezenas de Euros. De acordo com um especialista de marketing ele poderá vender o carregamento por 700, 650, 600 ou 550 dezenas de Euros com probabilidade de 25%, 46%, 19% e 10% respectivamente.

a) Admitindo que ele terá um custo de manuseamento de 50 dezenas de Euros, qual o valor esperado do lucro obtido pelo importador se ele comprar o carregamento.

b) Em alternativa à situação anterior, admita que o importador pode comprar tantos carregamentos de bananas quantos os necessários para satisfazer as encomendas diárias conseguidas pelos seus vendedores. Estes são três (A, B e C), e por dia vendem no máximo 1 carregamento. Os vendedores A, B e C vendem diariamente um carregamento de bananas com probabilidades, respectivamente, de 0.1, 0.2 e 0.3, actuando de forma independente entre eles. Determine a função probabilidade do número de carregamentos vendidos diariamente pelos 3 vendedores.

c) Suponha que, nas condições descritas na alínea b), que o custo de manuseamento (M), depende do nº de carregamentos (N) vendidos diariamente pelos vendedores. Este é dado pela relação $M= 50+(20N / (N+1))$. Determine o valor esperado e o desvio padrão do custo de manuseamento.

3. Um empresário pergunta se valerá a pena fazer um seguro contra chuva por ocasião de determinado acontecimento desportivo. Se não chover espera obter 100 dezenas de Euros de lucro com o acontecimento, mas se chover o lucro só será de 20 dezenas de Euros. Uma apólice de seguro de 70 dezenas de Euros custar-lhe-á 30 dezenas de Euros. Determine a probabilidade, **p** de chover, de modo que a esperança de lucro seja a mesma quer o empresário faça o seguro quer não.

4. Um empresário está a pensar em incluir como despesas dedutivas no IRS, as 100 dezenas de Euros que gasta anualmente com o seu iate, uma vez que, ocasionalmente recebe nesse iate alguns clientes para reuniões de negócios. O contabilista da empresa avisa-o de que a probabilidade de que haja uma auditoria é de 0.25, e se ocorrer essa auditoria a probabilidade de que a dedução não seja autorizada é de 0.9. Se a dedução não for autorizada o empresário terá de pagar a quantidade deduzida – 33% dos 100 dezenas de Euros, e ainda uma multa de 100 dezenas de Euros.

a) Deverá o empresário reclamar as despesas com o seu iate como despesas de negócio para dedução no IRS?

b) Qual deveria ser a multa a aplicar, de modo a que fosse indiferente para o empresário incluir ou não aquelas despesas para dedução no IRS?

departamento de matemática

5. Apesar de todas as medidas de segurança, continua a haver acidentes na fábrica da "TêxteisCor S.A.". Seja X o número de acidentes que ocorrem num mês nesta fábrica. A função de probabilidade de X é dada por:

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.25	k	l	0.15	0.1

a) Determine o valor de k e de l de modo a que o número esperado de acidentes num mês seja de 1.55.

b) Determine a função de distribuição de X.

c) Calcule a variância de X.

d) Usando a função de probabilidade e também a função de distribuição, determine a probabilidade de que, num mês:
   i) ocorram pelo menos 2 acidentes;
   ii) ocorram exactamente 5 acidentes;
   iii) ocorram menos de 3 acidentes;
   iv) ocorram mais de 2 e menos de 4 acidentes.

6. Um posto de gasolina é reabastecido uma vez por semana. As vendas no passado sugerem que a função de distribuição da procura semanal, X, medida em milhares de litros, é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{7}{2} & \text{se} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

a) Determine a função densidade de probabilidade de X.

b) Calcule a probabilidade de numa semana a procura semanal
   i) se situar entre os 1500 litros e os 2300 litros;
   ii) ser superior a 2300 litros.

c) Mostre que o valor esperado e o desvio padrão da procura semanal são, respectivamente, 2000 e 408.2 litros.

d) Determine a mínima quantidade de gasolina com que o posto se deve abastecer por semana para que o camião tanque abastecedor não encontre a gasolina esgotada no posto em mais de 8% das semanas.

7. Seja X a variável aleatória discreta com a função de distribuição F:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < -2 \\ 1/2 & \text{se} \quad -2 \le t < 0 \\ 3/4 & \text{se} \quad 0 \le t < 2 \\ 1 & \text{se} \quad t \ge 2 \end{cases}$$

a) Calcule a função probabilidade f.

b) Calcule:

$P(X=1)$, $P(X\leq 1)$, $P(X>1)$, $P(X\geq 2)$, $P(X<2)$, $P(0<X<2)$, $P(0<X\leq 2)$ e $P(1\leq X\leq 2)$.

c) Represente graficamente F e f.

d) Determine a média e a variância de X.

8. O tempo de espera no aeroporto de uma dada cidade (compreendido entre os instantes de chegada ao terminal de partida e de descolagem do avião) é uma variável aleatória X com uma função densidade de probabilidade em horas definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} a - bx & , \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \\ 0 & , \text{outros valores} \end{cases}$$

a) Sabendo que $\frac{7}{16}\times 100\,\%$ dos viajantes não esperam mais de uma hora e meia até à descolagem do avião, determine os valores de a e b.

b) Determine a função de distribuição de X.

c) Calcule $E(2+E(X))$.

d) Qual a probabilidade um passageiro ter de esperar entre 2 a 3 horas pela descolagem do avião?

e) Um viajante instalado no hotel GranConforto tem de apanhar 2 autocarros A e B para se deslocar ao aeroporto. O tempo de viagem no autocarro A pode ser de ¼ ou de ½ hora e no transporte B de ½ ou ¾ hora. Tanto para o autocarro A como para o B a probabilidade de o tempo de viagem ser de ½ hora é de 0.25. O tempo de viagem no autocarro A é independente do tempo de viagem no autocarro B. Determine a função de probabilidade do tempo de viagem, Y, do hotel até ao aeroporto.

9. Uma variável aleatória discreta tem função de probabilidade dada por $f(x)=k/x$ para $x=1,3,5,7$.

a) Calcule o valor de k.

b) Calcule $P(X=5)$.

10. Seja $k\in \mathbb{R}^+$ e f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ x+1 & \text{se} \quad -1 < x \leq 0 \\ -\frac{2}{k}x + 2 & \text{se} \quad 0 < x \leq k \\ 0 & \text{se} \quad x > k \end{cases}.$$

a) Determine o valor de k para o qual f é a densidade de probabilidade de uma variável aleatória X.

b) Mostre que $\{ X>12\, E(X) \}$ é um acontecimento certo.

c) Calcule $P[X\leq \frac{k}{2} \;/\; 0<X<k]$.

departamento de matemática

11. A função de distribuição de uma variável aleatória contínua X, é dada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x<0 \\ k\dfrac{x^2}{2}-k\dfrac{x^3}{3} & \text{se} \quad 0\le x<1, \\ \dfrac{k}{6} & \text{se} \quad x\ge 1 \end{cases} \qquad (k\in R)$$

a) Determine o valor de k.
b) Obtenha a função densidade de probabilidade de X.
c) Calcule E(X) e Var(X).
d) Calcule $P\left[X\le\frac{1}{2}\;\middle|\;\frac{1}{3}\le X<\frac{2}{3}\right]$.

12. Seja $f(x) = k(2x - x^2)$, $k>0$
Calcule o intervalo máximo e o valor de k de modo que f(x) seja uma f.d.p. de uma v.a. X.

13. A loja de desporto do João vende máquinas de exercícios, bem como outros artigos de desporto. Seja X o número de máquinas de exercício vendidas por dia. A função de probabilidade de X é dada por:

Número de máquinas de exercícios vendidas por dia	4	5	6	7	8	9	10
Probabilidade	0.08	k	p	0.19	0.23	0.16	0.09

Sabendo que E(X)=7.22, determine:

a) o valor de k e p

b) a função de distribuição cumulativa de X

c) a probabilidade que o número de máquinas de exercícios vendidas num determinado dia seja

i) maior que 8

ii) no máximo 6.

14. Uma caixa contém 5 parafusos defeituosos e 5 não defeituosos.
Extraem-se 2 parafusos. Determine a função de probabilidade e a função de distribuição da v.a. X: "Nº de parafusos não defeituosos obtidos"
a) Supondo haver reposição b)Supondo não haver reposição

15. O director de compras da empresa "Baratinho", pretende definir uma política de aquisição de matéria prima para o próximo ano. As necessidades de matéria prima por dia (em toneladas) são uma variável contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x/2 & 0<x<k \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

a) Calcule k.
b) Se se quiser que a probabilidade de ruptura da matéria prima seja igual a 0.02, qual o nível de abastecimento que deve ser assegurado diariamente?
c) Suponha que ele resolveu manter um nível de stocks que lhe assegure que a probabilidade de ruptura é de 0.02. A administração propôs-lhe dar-lhe um prémio de 10 unidades monetárias (u.m.) por cada dia em que não houvesse ruptura, mas cobrar-lhe uma multa de 500 u.m. sempre que tal se verificasse. Acha que é de aceitar? Justifique.

16. Uma caixa contém quatro bolas marcadas com os números 1, 2, 3, 4. Extrai-se com reposição, 2 bolas. Sendo X a v. a. "Semi-diferença entre o nº obtido na 1ª e 2ª bola", determine:
a) A função de distribuição de X
b) A esperança matemática de X
c) O desvio padrão
d) Var(3X + 2) e Var(0,5X - 1)

17. O departamento fabril de uma empresa fabricante de peças decorativas em vidro emprega 100 trabalhadores. Estudos efectuados pela empresa permitem assumir que X, o número de peças quebradas durante o fabrico, por mês, por empregado, tem função de probabilidade f_X dada por:

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1.8}.1.8^x}{x!} & \text{se } x = 0,1,2,3,4,\ldots\\ 0 & \text{para outros valores}\end{cases}$$

Por cada peça quebrada há um prejuízo de 100$00. O prejuízo é coberto pela empresa até 3 peças, por mês, por empregado. Caso o empregado quebre mais do que três peças deverá pagar o excesso do prejuízo.

a) Calcule a probabilidade de um empregado escolhido ao acaso quebrar pelo menos três peças num mês.
b) Seja Y o prejuízo da empresa por mês por empregado.
    i) Determine a função de probabilidade e a função de distribuição de Y.
    ii) Qual o prejuízo mais provável da empresa por mês por empregado?
    iii) Verifique que o valor médio de Y é de 164.1 escudos e que o desvio padrão de Y é de 104.8 escudos.

18. O gerente de marketing de uma determinada companhia de seguros apresenta a seguinte proposta para lançar um determinado seguro ***A***: qualquer pessoa que compre esse seguro poderá também comprar uma apólice anual de seguro de habitação contra incêndio - ***B***, no valor de 1 000 dezenas de Euros, com um prémio (custo) promocional muito baixo. O Gerente de marketing acredita que o cliente será atraído a fazer o seguro ***A*** por saber que poderá também ficar com um seguro de habitação - ***B***, com um custo que não encontrará em mais nenhuma companhia de seguros.
Estima-se que a probabilidade de que haja um incêndio numa casa, num ano, seja de 0.001.
Ignorando a possibilidade de perda parcial, uma casa segurada que arda, dá à companhia de seguros um prejuízo igual a 1 000 dezenas de Euros menos o valor do prémio; pelo contrário uma casa que não arda dá à companhia um lucro no valor do prémio.
O gerente de marketing pretende saber que prémio deve cobrar ao cliente pelo seguro de habitação ***B***, de modo a que, a companhia não tenha lucro mas também não tenha prejuízo com esse seguro. Por outras palavras, que valor se deve atribuir ao prémio, de modo a que o valor esperado do ganho por apólice seja zero?

SOLUÇÕES DE ALGUNS DOS EXERCÍCIOS

1 a) $f_X(x)=\begin{cases}0.5 & \text{se } x=0\\ 0.2 & \text{se } x=1\\ 0.3 & \text{se } x=2\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$ b) $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ 0.5 & \text{se } 0\le x<1\\ 0.7 & \text{se } 1\le x<2\\ 1 & \text{se } x\ge 2\end{cases}$

c) 0.6

2 a) -7 dezenas de Euros b) $f_X(x)=\begin{cases}0.504 & \text{se } x=0\\ 0.398 & \text{se } x=1\\ 0.092 & \text{se } x=2\\ 0.006 & \text{se } x=3\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$ c) E(M) = 55.29 e σ_M = 5.46.

3. $p=\frac{3}{7}=0.428$.

4 a) Sim, pois o ganho esperado do empresário incluindo as 100 dezenas de Euros como despesas dedutivas é 3.075 dezenas de Euros.

b) 113 66.67 Euros.

5 a) k = 0.3 e l = 0.2. b) $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ 0.25 & \text{se } 0\le x<1\\ 0.55 & \text{se } 1\le x<2\\ 0.75 & \text{se } 2\le x<3\\ 0.9 & \text{se } 3\le x<4\\ 1 & \text{se } x\ge 4\end{cases}$ c) 1.6475

d) i) 0.45 ii) 0 iii) 0.75 iv) 0.15.

6 a) $f_X(x)=\begin{cases}x-1 & \text{se } 1<x<2\\ 3-x & \text{se } 2<x<3\\ 0 & \text{se } x<1 \vee x>3\end{cases}$ b) i) 0.63 ii)0.245. d) 2.6.

7.a) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } x=-2\\ \frac{1}{4} & \text{se } x=0\\ \frac{1}{4} & \text{se } x=2\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$ b) 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

d) $E(X)=-\frac{1}{2}$ e $Var(X)=\frac{11}{4}$.

8 a) a=$\frac{9}{16}$ e b=$\frac{1}{8}$. b) $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x \le 1/2 \\ \frac{9}{16}x - \frac{x^2}{16} - \frac{17}{64} & \text{se } 1/2 \le x < 9/2 \\ 1 & \text{se } x \ge 9/2 \end{cases}$

c) 3.8333 d) 0.25. e) $f_Y(y)=\begin{cases} 0.625 & \text{se } x=1 \\ 0.1875 & \text{se } x=3/4 \\ 0.1875 & \text{se } x=5/4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$.

9 a) k=0.596 b) 0.1193.

10 a) k=$\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$.

11. a) k = 6 b) $f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 6x-6x^2 & \text{se } 0<x<1 \\ 0 & \text{se } x>1 \end{cases}$ c) E(X)= $\frac{1}{2}$ Var(X)=$\frac{1}{20}$.

d) 0.5

12. x∈[0,2] e k=$\frac{3}{4}$.

13 a) k=0.11 e p=0.14 b) $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<4 \\ 0.08 & \text{se } 4 \le x < 5 \\ 0.19 & \text{se } 5 \le x < 6 \\ 0.33 & \text{se } 6 \le x < 7 \\ 0.52 & \text{se } 7 \le x < 8 \\ 0.75 & \text{se } 8 \le x < 9 \\ 0.91 & \text{se } 9 \le x < 10 \\ 0 & \text{se } x \ge 10 \end{cases}$ c) i) 0.25 ii) 0.33.

14. a) $f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x=0 \vee x=2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$, $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

b) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{9} & \text{se } x=0 \vee x=2\\ \frac{5}{9} & \text{se } x=1\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$, $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ \frac{2}{9} & \text{se } 0\le x<1\\ \frac{7}{9} & \text{se } 1\le x<2\\ 1 & \text{se } x\ge 2\end{cases}$

15. a) k=2 b) 1.72 toneladas. c) Não deve aceitar.

16 a) $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<-3/2\\ \frac{1}{16} & \text{se } -3/2\le x<-1\\ \frac{3}{16} & \text{se } -1\le x<-1/2\\ \frac{6}{16} & \text{se } -1/2\le x<0\\ \frac{10}{16} & \text{se } 0\le x<1/2\\ \frac{13}{16} & \text{se } 1/2\le x<1\\ \frac{15}{16} & \text{se } 1\le x<3/2\\ 1 & \text{se } x\ge 3/2\end{cases}$ b) 0 c) 0.7906 d) 5.625 e 0.156.

17 a) 0.2694

b) i) $f_Y(x)=\begin{cases}0.1653 & \text{se } x=0\\ 0.2975 & \text{se } x=100\\ 0.2678 & \text{se } x=200\\ 0.2694 & \text{se } x=300\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$ $F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ 0.1653 & \text{se } 0\le x<100\\ 0.4628 & \text{se } 100\le x<200\\ 0.7306 & \text{se } 200\le x<300\\ 1 & \text{se } x\ge 300\end{cases}$

ii) 100\$00.

18. 10 Euros