Intervalos de Confiança

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Introdução

Estimar o consumo médio de um automóvel, estimar o tempo médio que um funcionário leva a aprender uma nova tarefa ou estimar a percentagem (proporção) de pessoas que irão consumir um produto que vai ser lançado no mercado, são exemplos de estimação.
A estimação pode ser feita por dois processos:

- Estimação Pontual.
- Estimação Intervalar.

Estimação Pontual

Na estimação pontual, estima-se o parâmetro θ desconhecido (ou $(\tau(\theta))$ usando o valor de um estimador $\widehat{\theta}$, o qual é designado por estimador pontual.

Desvantagem

Não permite avaliar a precisão do estimador.

Exemplo

Parâmetro populacional	Exemplo de estimador pontual
Média (μ)	$\overline{X}$
Variância (σ^2)	S^2

Estimação Intervalar

A estimação intervalar consiste na determinação de um intervalo onde, com uma certa confiança (probabilidade), esteja o parâmetro θ desconhecido, tendo-se em conta um seu estimador.

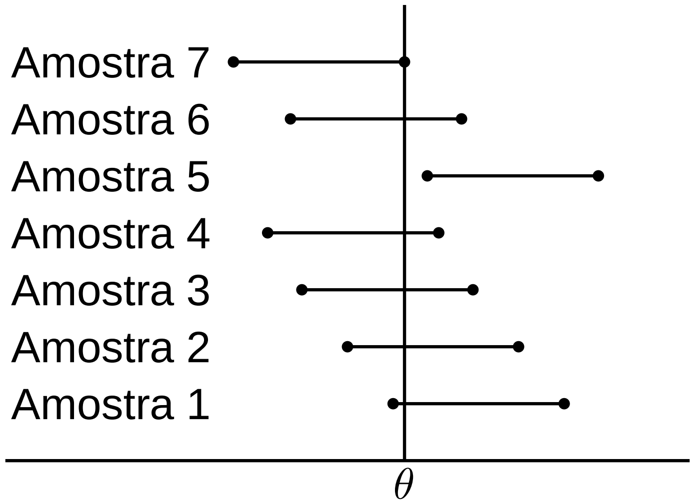
Assim, $P(L_1 < \theta < L_2) = \lambda$ significa que a probabilidade do intervalo aleatório (L_1, L_2) conter o valor exacto θ é λ.

O intervalo (L_1, L_2) é designado por intervalo de confiança para o parâmetro θ, com um nível de confiança λ.

Depois de recolhida uma amostra aleatória, usam-se os valores observados dessa amostra, para calcular os valores observados das variáveis aleatórias L_1 e L_2, que se representam, respectivamente, por l_1 e l_2.

(l_1, l_2) é o intervalo de confiança concreto para aquela amostra.

Estimação Intervalar



Estimação Intervalar

Vantagem

É possível determinar o erro máximo cometido na estimação, com uma certa confiança

Notas

- Tem em conta as variações das estatísticas amostrais de amostra para amostra.
- Nunca podemos ter intervalos com 100% de confiança.

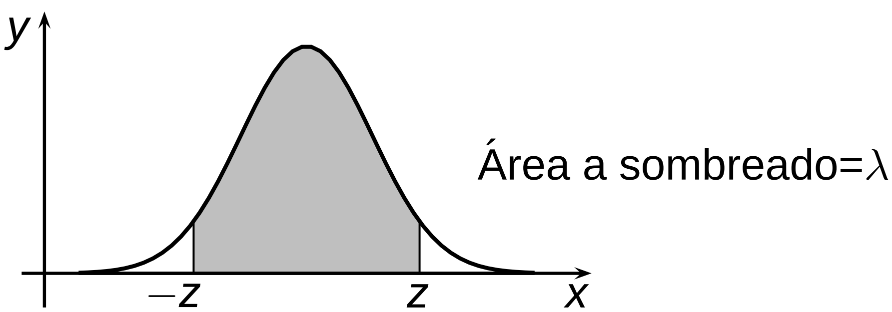
Estamos perante uma situação em que temos conhecimento da distribuição de X e também da sua variância:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

As variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ que constituem a amostra, são independentes e têm distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, donde, pelo Teorema da aditividade da distribuição normal,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

A v. a. Z é designada por variável fulcral.



Int. conf. para a média de uma pop. normal com var. conhecida

$$P(-z < Z < z) = \lambda \Leftrightarrow P\left(-z < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\right) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow P\left(-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu < z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \lambda$$

Logo, o intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para μ é dado por:

$$\left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Int. conf. para a média de uma pop. normal com var. conhecida

Sendo

$$\mu \in \left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) ,$$

o erro que cometemos usando $\overline{X}$ para estimar μ (Erro$= |\overline{X} - \mu|$) é, com probabilidade λ, inferior ou igual a $z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (metade da amplitude do intervalo).

Sendo assim, é possível escolher o tamanho de amostra, n, de modo a que o erro cometido seja menor ou igual a um valor especificado, e, com uma certa confiança $\lambda \times 100\%$.

Basta resolver a seguinte equação:

$$z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = e\,.$$

Exemplo

Certo equipamento de empacotamento automático, encontra-se regulado para encher embalagens de um quilo de certo produto. O seu deficiente funcionamento origina prejuízo para a empresa: se a maioria das embalagens tem peso inferior ao estabelecido, haverá reclamações por parte dos clientes e perda de prestigio; peso excessivo será por outro lado anti-económico. Aceita-se da experiência passada que o peso das embalagens se comporta normalmente com desvio padrão de 12 gramas. Para verificar a afinação do equipamento, seleccionaram-se em determinada altura, nove embalagens cujos pesos exactos (em gramas) foram anotados:

$$983 \quad 992 \quad 1011 \quad 976 \quad 997 \quad 1000 \quad 1004 \quad 983 \quad 998\,.$$

Exemplo

1. Estime μ através de uma estimativa pontual.
2. Construa um intervalo de confiança para μ, com os seguintes graus de confiança: $90\%, 95\%$ e 99%. Como varia a precisão do intervalo (a sua amplitude) com o grau de confiança escolhido?
3. Qual deverá ser o tamanho da amostra a recolher, para que o erro que se comete ao considerar o valor da média amostral como estimativa para a média da população, não seja superior a 1. (utilize $\lambda = 0.95$).

Sol.:

1. $\overline{x} = 993.78$
2. $[I.C._{0.9}]_\mu = (987.2, 1000.36)$; $[I.C._{0.95}]_\mu = (985.94, 1001.62)$; $[I.C._{0.99}]_\mu = (983.476, 1004.084)$.

   Quanto maior é a confiança, maior é a amplitude do intervalo, i.e., menor é a precisão do intervalo.

   O que se ganha em “confiança”perde-se em “precisão”.
3. $n \geq 554$

Int. conf. para a média de uma pop. normal com var. desconhecida, usando amostras de pequena dimensão

Neste caso, não conhecemos o valor de σ^2 e como tal não podemos usar a variável fulcral do caso anterior.

Sabemos que, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}\,.$$

Agora, a variável fulcral é T.

Determina-se o valor de t tal que $P(-t < T < t) = \lambda$, recorrendo a uma tabela da distribuição t-Student (ou a um computador).

O intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para o valor esperado μ é dado por

$$\left(\overline{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Int. conf. para μ usando amostras de grande dimensão

Pelo Teorema Limite Central, quando a amostra é suficientemente grande ($n > 30$), a média amostral $\overline{X}$ tem, aproximadamente, distribuição normal de média μ e variância σ^2/n, isto é,

$$\overline{X} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\,.$$

A variável fulcral é então

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

e o intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$, é dado por

$$\left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

onde z é tal que $P(-z < Z < z) = \lambda$.

Int. conf. para μ usando amostras de grande dimensão

Na prática o valor de σ não é, em geral, conhecido. Uma vez que a amostra é suficientemente grande, a substituição de σ pelo seu estimador S na variável Z, não invalida que esta tenha aproximadamente distribuição normal. Então, a variável fulcral passa a ser,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0, 1)$$

e o intervalo de confiança

$$\left(\overline{X} - z\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

onde z é tal que $P(-z < Z < z) = \lambda$.

Estimação intervalar da diferença entre valores médios $\mu_1 - \mu_2$

Consideram-se agora duas variáveis aleatórias, X_1 e X_2, que representam uma certa característica em duas populações distintas, População 1 e População 2, respectivamente.

Pretende-se construir um intervalo de confiança para a diferença $\mu_1 - \mu_2$, sendo μ_1 o valor médio de X_1 e μ_2 o valor médio de X_2, ambos desconhecidos.

Mais notação: $\sigma_1, \sigma_2 \hookrightarrow$ desvios padrões de X_1 e X_2;
$n_1, n_2 \hookrightarrow$ dimensão das amostras recolhidas.

Nota:
As amostras recolhidas devem ser independentes uma da outra.

Para estimar $\mu_1 - \mu_2$ pontualmente, usamos o valor do estimador pontual $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

Int. conf. para a diferença entre valores médios de duas populações normais com variâncias conhecidas

Temos: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Logo, pelo teorema da aditividade da distribuição normal,

$$\overline{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2/n_1\right) \quad \text{e} \quad \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2/n_2\right).$$

Uma vez que as amostras são independentes uma da outra, $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ são independentes. Assim, mais uma vez pelo teorema da aditividade da distribuição normal,

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

e a variável fulcral é

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Int. conf. para a diferença entre valores médios de duas populações normais com variâncias conhecidas

$$P(-z < Z < z) = \lambda \Leftrightarrow P\left(-z < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z\right) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow P\left(-z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) < z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = \lambda$$

Logo, o intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ é dado por:

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

Int. conf. para a diferença entre as médias de 2 populações normais, com var. desconhecidas mas iguais, usando amostras de pequena dimensão

Se $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\sigma_1 = \sigma_2$, então

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}\,.$$

Logo, o intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ é dado por:

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,, \right.$$
$$\left. (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \right)$$

onde t é tal que $P(-t < T < t) = \lambda$.

Int. conf. para $\mu_1 - \mu_2$ usando amostras de grande dimensão

Pelo teorema Limite Central temos: $\overline{X}_1 \dot{\sim} N\big(\mu_1, \sigma_1^2/n_1\big)$ e $\overline{X}_2 \dot{\sim} N\big(\mu_2, \sigma_2^2/n_2\big)$. Uma vez que as amostras são independentes, $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ são independentes. Assim,

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \dot{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

e a variável fulcral é

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)\,.$$

Logo, o intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ é dado por:

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

onde z é tal que $P(-z < Z < z) = \lambda$.

Int. conf. para $\mu_1 - \mu_2$ usando amostras de grande dimensão

Se não forem conhecidos os valores de σ_1 e σ_2, estes são substituídos pelos seus estimadores S_1 e S_2. Como as amostras são de grande dimensão, esta substituição não altera a distribuição assimptótica de Z, vindo

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)\,.$$

Logo, o intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ é dado por:

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

onde z é tal que $P(-z < Z < z) = \lambda$.

Int. Conf. para a variância de uma população normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, para uma amostra de tamanho n,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}\,.$$

Sejam a e b tais que: $P(\chi^2_{n-1} < a) = \frac{1-\lambda}{2}$ e $P(\chi^2_{n-1} > b) = \frac{1-\lambda}{2}$.

Assim, $P(a < \chi^2_{n-1} < b) = \lambda$, donde

$$P\left(a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b\right) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{1}{b} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{a}\right) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = \lambda\,,$$

i.e.,

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right) \quad \text{com} \quad \lambda \times 100\% \text{ de confiança.}$$

Notação

- X_1 e X_2 : v.a.s que representam uma certa característica em duas populações distintas, População 1 e População 2
- σ_1 : Desvio-padrão de X_1 ;
- σ_2 : Desvio-padrão de X_2 ;
- n_1 : Tamanho da amostra da População 1 ;
- n_2 : Tamanho da amostra da População 2 ;

Nota

As amostras recolhidas devem ser independentes uma da outra.

Para estimar σ_1^2/σ_2^2 pontualmente, usamos o valor do estimador pontual S_1^2/S_2^2 .

Temos: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Então,

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n_2-1}^{n_1-1}$$

Sejam a e b tais que

$$P\left(F_{n_2-1}^{n_1-1} < a\right) = \frac{1-\lambda}{2} \quad \text{e} \quad P\left(F_{n_2-1}^{n_1-1} > b\right) = \frac{1-\lambda}{2}$$

Assim,

$$P\left(a < \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < b\right) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad P\left(a\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < b\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = \lambda$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{b\,S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{a\,S_2^2}\right) = \lambda$$

Int. Conf. para a razão entre as variâncias de duas populações normais

Então,

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left(\frac{S_1^2}{b\,S_2^2}\;,\;\frac{S_1^2}{a\,S_2^2} \right)$$

com $\lambda \times 100\%$ de confiança.

O intervalo de confiança a $\lambda \times 100\%$ para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é então dado por

$$\left(\frac{S_1^2}{b\,S_2^2}\;,\;\frac{S_1^2}{a\,S_2^2} \right)\;.$$

Int. Conf. para uma proporção

Consideremos uma população cujos elementos podem ser classificados em dois tipos: Sucesso e Insucesso.

Pretende-se estimar a proporção p de sucessos na população.

Dada uma amostra de tamanho n, uma estimativa pontual de p é dada por $\hat{p} = x/n$, onde x é o nº de elementos do tipo sucesso contidos na amostra.

Esta estimativa é produzida pelo estimador $\hat{p} = X/n$, onde X é a v. a. que representa o nº de sucessos contidos numa amostra aleatória de tamanho n.
Tem-se,

$$X \sim B(n, p)\,.$$

Int. Conf. para uma proporção

Se n for suficientemente grande, a dist. binomial pode ser bem aproximada pela normal, vindo

$$X \dot{\sim} N(np, npq) \quad \Rightarrow \quad \hat{p} = \frac{X}{n} \dot{\sim} N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

e consequentemente

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Seja z tal que $P(-z < Z < z) = \lambda$. Então,

$$P(-z < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} < z) = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(-z\sqrt{pq/n} < \hat{p} - p < z\sqrt{pq/n}) = \lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(\hat{p} - z\sqrt{pq/n} < p < \hat{p} + z\sqrt{pq/n}) = \lambda$$

Int. Conf. para uma proporção

Da última igualdade poderíamos deduzir que o I.C., a $\lambda \times 100\%$, para p seria

$$\left(\hat{p} - z\sqrt{pq/n}, \hat{p} + z\sqrt{pq/n}\right)$$

No entanto, os limites deste intervalo contêm o parâmetro p que queremos estimar (e que é desconhecido).
Para contornar esta dificuldade podemos substituir p pelo seu estimador, o que conduz ao seguinte intervalo de confiança

$$\left(\hat{p} - z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}, \hat{p} + z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}\right),$$

onde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

Questão

Qual deverá ser o tamanho da amostra, de modo a que, com uma certa confiança, o erro que se comete ao estimar p usando $\hat{p}$, seja inferior a e?

Como vimos anteriormente,

$$P(\hat{p} - z\sqrt{pq/n} < p < \hat{p} + z\sqrt{pq/n}) = \lambda$$

isto é, com $\lambda \times 100\%$ de confiança a distância máxima entre p e $\hat{p}$ é:

$$z\sqrt{pq/n} = z\sqrt{p(1-p)/n}$$

Pretende-se calcular o valor de n tal que

$$e = z\sqrt{p(1-p)/n}$$

Resolvendo em ordem a n, vem $n = z^2 p(1-p)/e^2$.

Como o valor de p não é conhecido, podemos substituí-lo por uma sua estimativa $\hat{p}$, conhecida *a priori* (caso exista), obtendo

$$n = z^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{e^2}\ .$$

Quando p não pode ser estimada *a priori*, um procedimento alternativo consiste em substituir $p(1-p)$ pelo máximo valor que pode tomar que é 0.25, o que conduz a uma dimensão máxima da amostra, uma vez que se tomou para $p(1-p)$ o valor mais desfavorável,

$$n = z^2 \frac{0.25}{e^2}\ .$$

Notação

- X_1,X_2: v.a.s que representam o número de sucessos contidos nas amostras retiradas, respectivamente, da População 1 e da População 2;
- n_1: Tamanho da amostra da População 1 ;
- n_2: Tamanho da amostra da População 2 ;

Nota

As amostras recolhidas devem ser independentes uma da outra.

$$\hat{p}_1 = X_1/n_1 \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = X_2/n_2$$

Para estimar $p_1 - p_2$ pontualmente, usamos o valor do estimador pontual $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

Tem-se: $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ e $X_2 \sim B(n_2, p_2)$.
Se $n_1 > 30$ e $n_2 > 30$,

$$X_1 \dot{\sim} N(n_1 p_1, n_1 p_1 q_1) \quad \text{e} \quad X_2 \dot{\sim} N(n_2 p_2, n_2 p_2 q_2)$$

$$\hat{p}_1 \dot{\sim} N(p_1, \frac{p_1 q_1}{n_1}) \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 \dot{\sim} N(p_2, \frac{p_2 q_2}{n_2})$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \dot{\sim} N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

Logo a variável fulcral é:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0, 1)$$

Int. Conf. para a diferença entre proporções

Para calcular o intervalo de confiança, a $\lambda \times 100\%$, para $p_1 - p_2$, determinamos z tal que $P(-z < Z < z) = \lambda$, donde,

$$P\left((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}\right).$$

Os limites do intervalo sugerido pela igualdade anterior contêm os parâmetros desconhecidos p_1 e p_2. Contornamos esta dificuldade substituindo p_1 e p_2 por $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, respectivamente. Assim, obtemos o seguinte intervalo de confiança para $p_1 - p_2$ a $\lambda \times 100\%$:

$$\left((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}\,,\ (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}\right)$$

onde $\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1$ e $\hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2$.