# Probabilidades

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Gestão de Empresas
Marketing
Contabilidade e Administração

## Introdução

- Ao comprar acções, um investidor sabe que o ganho que vai obter com elas está sujeito a um certo grau de incerteza.
- Uma cadeia de lojas que toma a decisão de abrir uma nova loja numa determinada cidade, não consegue saber à partida se a loja vai ter o sucesso pretendido
- Quando uma empresa de espectáculos aposta num certo dia para organizar um concerto ao ar livre, está sujeita às más condições meteorológicas que prejudiquem o sucesso do mesmo

Tal como decidir comprar acções, decidir abrir uma nova loja ou escolher um dia para um concerto, também fazer inferências acerca da população com base nos dados de uma amostra envolve um certo grau de incerteza.

# Introdução

É importante dispor de uma medida do grau de incerteza de um fenómeno aleatório. Essa medida é a probabilidade.

O estudo da teoria das probabilidades é pois bastante importante, pois esta está na base da inferência estatística e é um poderoso aliado nos processos de tomada de decisão.

# Experiências Aleatórias

Uma experiência aleatória é uma experiência onde intervém o acaso, isto é, cujos resultados são incertos, não sendo portanto possível saber qual o resultado da experiência antes de a realizar

### Exemplos

- o lançamento de um dado e registo do número de pontos obtidos;
- um gestor de produção observa uma linha de produção durante uma hora e conta o número de peças defeituosas;
- um analista financeiro observa a cotação na bolsa das acções de uma determinada empresa para saber se esta subiu ou não.

# Espaço de Resultados. Acontecimentos Aleatórios

O espaço amostral, $\Omega$, de uma experiência aleatória, também designado por espaço de resultados ou espaço fundamental, é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência aleatória.

Qualquer resultado individual é representado por $\omega$ ($\omega \in \Omega$).

Os subconjuntos de $\Omega$ são conjuntos de resultados possíveis da experiência aleatória. Estes designam-se por acontecimentos aleatórios.

O espaço de resultados, $\Omega$ , é denominado por acontecimento certo.

Os acontecimentos formados por um elemento, $\{\omega\}$, são designados por acontecimentos elementares.

O conjunto vazio, $\emptyset$ ou $\{\}$, denomina-se de acontecimento impossível.

# Espaço de Resultados. Acontecimentos Aleatórios

## Exemplos

- Lançamento de uma moeda ao ar

  $F \equiv$ 'saída de face' $\qquad C \equiv$ 'saída de coroa'

  Espaço de resultados: $\Omega = \{F, C\}$
- Lançamento de um dado

  $j \equiv$ 'aparição da face com j pontos'

  Espaço de resultados: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Um gestor de produção observa uma linha de produção durante uma hora e conta o número de peças defeituosas

  Espaço de resultados: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

Sejam $A$ e $B$ acontecimentos associados a uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega$

- $A \subset B$

  A realização de A implica a realização de B.
- $A = B$ ($A$ e $B$ são idênticos):$A \subset B$ e $B \subset A$

  A realização de um implica a realização do outro.
- $A \cap B$ realiza-se se e só se A e B se realizam conjuntamente.
- $A \cup B$ realiza-se se e só se A ou B se realizam.
- $A \cap B = \emptyset$ ($A$ e $B$ dizem-se mutuamente exclusivos ou incompatíveis)

  A realização de um implica a não realização do outro.
- $A \backslash B$ ou $A - B$ realiza-se se e só se A se realiza sem que B se realize.
- $A \Delta B$ realiza-se se e só se A realiza ou B se realiza mas não os dois conjuntamente.
- $\overline{A} = \Omega - A$ realiza-se se e só se A não se realiza

# Definição Clássica de probabilidade

Suponha que numa experiência aleatória com $n$ resultados possíveis, todos equiprováveis (igualmente prováveis), um acontecimento $A$ pode realizar-se de $n_A$ maneiras diferentes. Então a probabilidade do acontecimento $A$ é dada por:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados favoráveis a A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados possíveis}}$$

## Exemplo

Lançamento de um dado honesto

$$A \equiv \text{'saída de face com um n}^{\text{o}} \text{ par de pontos'} \hookrightarrow A = \{2, 4, 6\}$$

Como o dado é honesto, os 6 resultados possíveis são igualmente prováveis.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

# Definição Clássica de probabilidade

Esta definição tem algumas limitações:

- só pode ser aplicada se o número de resultados possíveis da experiência aleatória for finito;
- só pode ser aplicada se os resultados forem igualmente prováveis.

Esta definição também não permite dar resposta às seguintes questões:

- Qual é a probabilidade de uma fábrica produzir num dia 20 unidades?
- Qual a probabilidade de sair uma face no lançamento de uma moeda não equilibrada?
- Qual é a probabilidade de uma pessoa seleccionada ao acaso ser hipertensa?
- Qual é a probabilidade de uma peça que sai de uma linha de produção ser defeituosa?

# Definição Frequencista de probabilidade

Vamos admitir que realizamos uma determinada experiência aleatória $n$ vezes, em idênticas condições, e que o acontecimento $A$ se realizou $n_A$ vezes. Seja $f_A$ a frequência relativa da ocorrência de $A$, isto é,

$$f_A = \frac{n_A}{n} .$$

De acordo com a definição frequencista de probabilidade, $f_A$ é uma aproximação da probabilidade de $A$, $\mathrm{P}(A)$, e quanto maior for $n$, melhor será essa aproximação. Isto é, quando se aumenta o número de realizações da experiência, a frequência relativa $f_A$ tende para a probabilidade do acontecimento $A$:

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n \to \infty} f_A .$$

Podemos então dizer que a frequência relativa fornece uma boa indicação do valor da probabilidade, quando se repete a experiência um número suficientemente grande de vezes.

# Definição Frequencista de probabilidade

## Exemplo

Suponhamos que depois de examinarmos uma moeda damos conta que esta não é equilibrada, i.e., que os acontecimentos

$$F \equiv \text{'saída de face'} \qquad \text{e} \qquad C \equiv \text{'saída de coroa'}$$

não são igualmente prováveis.
Seja $p$ a probabilidade do acontecimento $F$:

$$p = \mathrm{P}(F)\,.$$

Podemos aproximar o valor de $p$, realizando um grande número de experiências e tomando a frequência relativa do acontecimento $F$.

Se a moeda fosse equilibrada, ao fim de um grande número de lançamentos a frequência relativa aproximar-se-ía de 0.5.

# Definição Frequencista de probabilidade

## Exemplo

Suponha que é gestor de vendas de um concessionário de uma marca conhecida de automóveis e precisa de saber qual é a probabilidade do stand vender mais de 4 automóveis na próxima semana. Através dos registos da empresa foi possível saber qual o número de automóveis vendidos por semana, nas últimos 50 semanas. Estes dados são apresentados na tabela seguinte.

| nº de automóveis vendidos | nº de semanas |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 10 |
| 2 | 18 |
| 3 | 12 |
| 4 | 3 |
| 5 | 3 |
| 6 | 2 |

Usando a definição frequencista de probabilidade podemos aproximar a probabilidade do stand vender mais de 4 automóveis na próxima semana por $\frac{3+2}{50} = 0.1$

## Definição Subjectiva de probabilidade

Quando ao olhar para o céu diz a alguém que vai chover até ao fim do dia, está a usar a sua intuição para estabelecer uma probabilidade para a ocorrência de um acontecimento aleatório, isto é, está a usar a definição subjectiva de probabilidade.

Uma probabilidade subjectiva surge quando uma pessoa atribui um grau de credibilidade a um certo acontecimento aleatório, baseada na sua intuição ou no seu conhecimento empírico.

### Exemplos

- O Sr. João é um Benfiquista e acha que a probabilidade de o Benfica ganhar o campeonato nesta época é superior a 0.8;
- A Maria sabe que 15% dos alunos de Estatística têm uma nota superior a 14, no entanto ela acredita que vai tirar uma nota superior a 14 com probabilidade de 0.75.

## Propriedades das Probabilidades

Sejam $A$, $B$ e $C$ acontecimentos quaisquer associados a uma experiência aleatória cujo espaço de resultados é $\Omega$.

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ e $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
- $\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

# Propriedades das Probabilidades

- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ – Regra da Adição

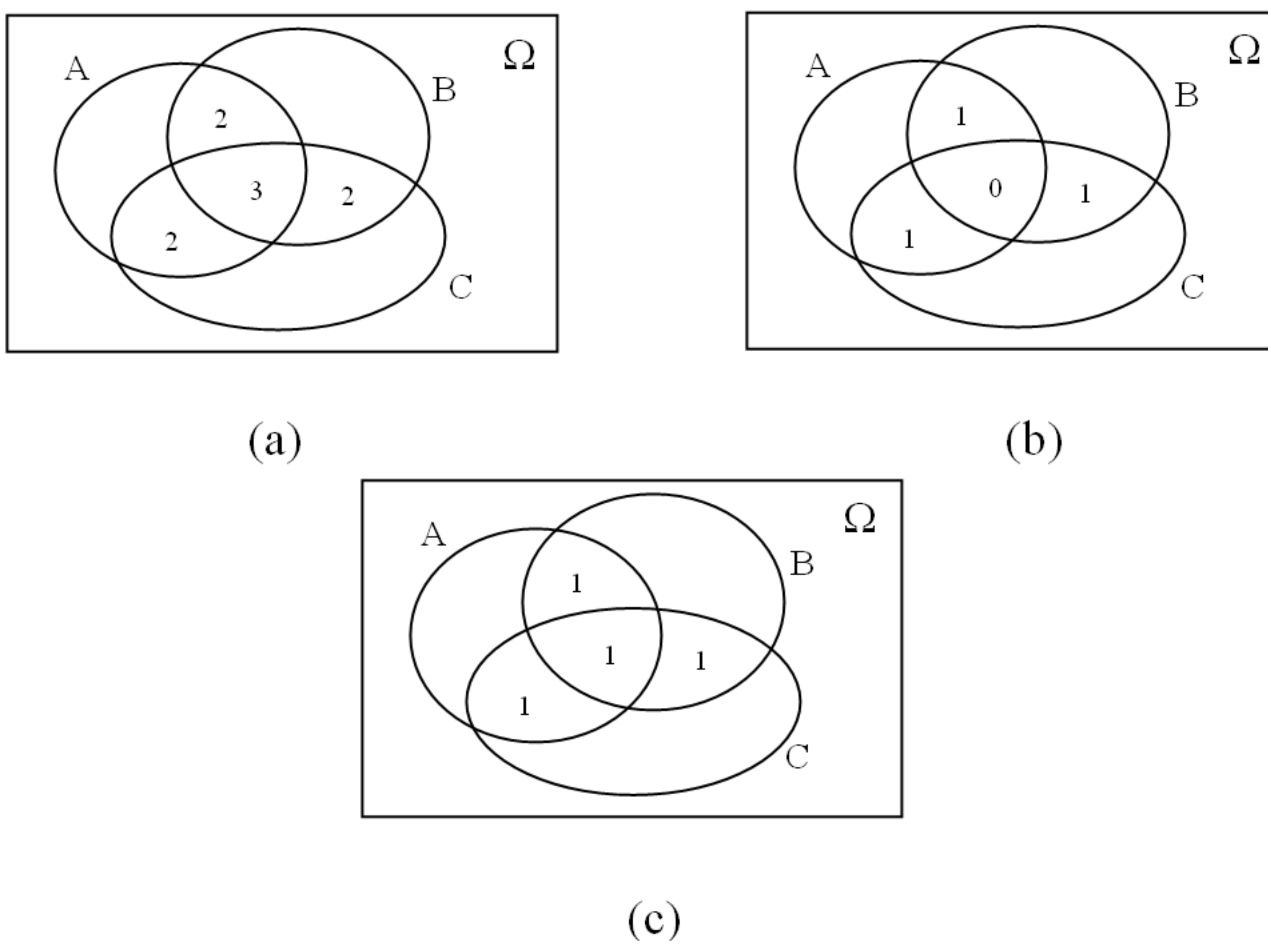
  Se $A$ e $B$ são acontecimentos incompatíveis,i.e.,
  $A \cap B = \emptyset$, então,

  $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

  Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são disjuntos dois a dois, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$,
  $i \neq j$, então

  $$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$$

- $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$
  $=$
  $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$



# Probabilidade Condicionada

## Definição

Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega$. Se $\mathrm{P}(B) \neq 0$, a probabilidade condicional ou condicionada de A dado B, denota-se por $P(A|B)$ e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Trata-se da probabilidade de se realizar o acontecimento $A$ sabendo que se realizou o acontecimento $B$.

De forma análoga, se $\mathrm{P}(A) \neq 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad com \quad P(A) \neq 0$$

# Probabilidade Condicionada - Exemplo

## Exemplo

Suponhamos que dispomos da informação de que ao lançar o dado saiu uma face com um número par de pontos, isto é, realizou-se o acontecimento

$$A \equiv \text{“saída de face com um n.º par de pontos”} = \{2, 4, 6\}$$

Qual será a probabilidade de ocorrência do acontecimento $B$?

$$B \equiv \text{“saída de face com mais de 5 pontos”} = \{6\}$$

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\mathrm{P}(\{6\})}{\mathrm{P}(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

## Probabilidade Condicionada - Exemplo

### Exemplo (*cont.*)

Calculemos agora a probabilidade de não sair face com mais de 5 pontos, $\overline{B}$, sabendo que ocorreu $A$.

$$\mathrm{P}(\overline{B}|A) = \frac{\mathrm{P}(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\mathrm{P}(\{2,4\})}{\mathrm{P}(\{2,4,6\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P}(\overline{B}|A) = 1 - \mathrm{P}(B|A)$$

## Probabilidade Condicionada - Exercício

### Exercício

O gerente da loja de música MUSICASTORE sabe que 30% dos clientes que entram na loja pedem ajuda a um assistente e que 20% dos clientes adquirem efectivamente um produto. Sabe-se também que 15% dos clientes pedem ajuda a um assistente e compram efectivamente um produto.

Calcule a probabilidade de um cliente, que pediu ajuda a um assistente, comprar um produto.

Sol:0.5

# Regra da Multiplicação

Uma consequência imediata da probabilidade condicional é a regra da multiplicação das probabilidades, a qual expressa a probabilidade da intersecção em termos da probabilidade individual dos eventos e da probabilidade condicional.

## Definição

Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega$. A probabilidade da sua intersecção pode ser derivada da probabilidade condicional através de:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B) \quad \text{se } \mathrm{P}(B) \neq 0$$

Também,

$$\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) \quad \text{se } \mathrm{P}(A) \neq 0$$

# Regra da Multiplicação

Generalizando a regra da multiplicação a $n$ acontecimentos vem,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

# Acontecimentos Independentes

## Definição

Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega$. Estes acontecimentos dizem-se independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Da regra da multiplicação segue que:

$$P(A|B) = P(A) \quad (se\ P(B) > 0)$$

$$P(B|A) = P(B) \quad (se\ P(A) > 0)$$

# Acontecimentos Independentes

Mais genericamente, os acontecimentos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes, se são independentes 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, etc. , isto é, se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \text{ para todo } i \neq j$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$

$$\text{com } i, j \text{ e } k \text{ tais que } i \neq j,\ i \neq k,\ k \neq j$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

# Exemplo/Exercício

### Exercício

Relativamente ao exemplo inicial, diga se os acontecimentos "Pedir ajuda a um assistente" e "Comprar um produto" são ou não independentes. Justifique.

Sol:Não

# Teorema das Probabilidades Totais

### Teorema (das Probabilidades Totais)

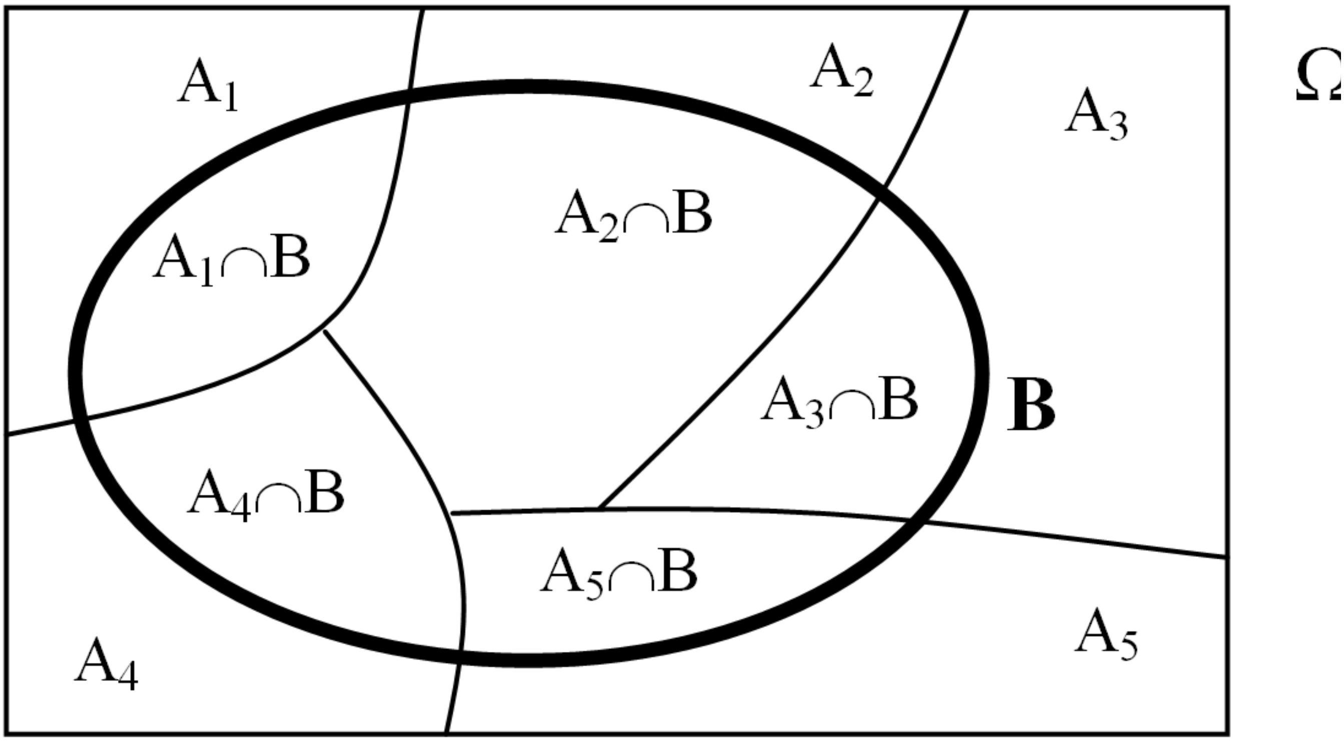
*Considere uma partição $A_1, A_2, \ldots, A_n$, do espaço amostral $\Omega$, tal que $\mathrm{P}(A_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, e seja $B$ um acontecimento de $\Omega$. Então*

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) &\quad (1)\\
&= P(B|A_1)P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n) &\quad (2)
\end{aligned}
$$

### Nota

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma partição do espaço amostral $\Omega$ se são disjuntos dois a dois e $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

# Partição




# Teorema das Probabilidades Totais

De facto,

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

Pela regra da adição,

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap B)\,,$$

uma vez que $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ são disjuntos dois a dois e, pela regra da multiplicação,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

# Teorema de Bayes

### Teorema (de Bayes)

*Considere uma partição* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *do espaço amostral* $\Omega$, *tal que* $\mathrm{P}(A_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, *e seja* $B$ *um acontecimento de* $\Omega$. *Então*

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}\ ,\ k = 1, 2, ..., n$$