# Variáveis Aleatórias

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

## Exemplo

No lançamento de duas moedas ao ar, os resultados possíveis são:

FF, FC, CF ou CC

No entanto, o nosso interesse pode estar na quantidade de faces obtidas e não no resultado propriamente dito.

# Variável Aleatória

## Definição

Uma variável aleatória (v.a.) é uma função que atribui um valor numérico a cada resultado individual de uma experiência aleatória. Isto é,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

## Exemplo

Denotemos por X a variável aleatória do exemplo anterior.

$X \equiv$
"número de faces obtidas num lançamento de duas moedas".

$$\begin{array}{rl} X : \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ CC & \rightarrow 0 \\ CF & \rightarrow 1 \\ FC & \rightarrow 1 \\ FF & \rightarrow 2 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega\text{=CC} \\ 1, & \text{se } \omega\text{=CF,FC} \\ 2, & \text{se } \omega\text{=FF} \end{cases}$$

## Exemplo (Exerc. 14b)

Uma caixa contém 5 parafusos defeituosos e 5 não defeituosos. Extraem-se 2 parafusos sem reposição.

Considere os acontecimentos:

$D_i$ ="Saiu parafuso defeituoso na i-ésima tiragem"

$N_i$ ="Não saiu parafuso defeituoso na i-ésima tiragem".

Os resultados possíveis para esta experiência aleatória são:

$$D_1 \cap D_2 \equiv DD \qquad D_1 \cap N_2 \equiv DN$$
$$N_1 \cap D_2 \equiv ND \qquad N_1 \cap N_2 \equiv NN$$

Considere a variável aleatória $X$ ="número de parafusos não defeituosos obtidos".

$$\begin{array}{rl} X : \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ DD & \rightarrow 0 \\ ND & \rightarrow 1 \\ DN & \rightarrow 1 \\ NN & \rightarrow 2 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega\text{=DD} \\ 1, & \text{se } \omega\text{=ND,DN} \\ 2, & \text{se } \omega\text{=NN} \end{cases}$$

## Exemplos

- As peças que saem de uma linha de produção são inspeccionadas e o seu estado é registado: boa ou com defeito. Quando é encontrada uma peça defeituosa a operação pára para se averiguar qual a causa do defeito. O número de peças inspeccionadas é uma variável aleatória.
- O rendimento familiar mensal de um habitante de Viseu seleccionado ao acaso é uma variável aleatória.
- O tempo de vida de uma pilha produzida no sector C de uma fábrica é uma variável aleatória.

## Definição

Uma variável aleatória X diz-se discreta se o conjunto de valores possíveis de X for finito ou infinito numerável.

## Exemplos

- O número de telemóveis com defeito numa produção de 100 telemóveis.
- O n.º de passageiros que fazem o check-in num balcão numa determinada hora

## Definição

Seja X uma v.a. discreta. A função de probabilidade de X é uma função $f_X$ que associa a cada valor possível x de X a sua probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Esta função tem as seguintes propriedades:

- $0 \leq f_X(x) \leq 1 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{x_i} f_X(x_i) = 1$

## Exemplo (Exerc. 14b - *cont.*)

Determine a função de probabilidade.

$$f_X(0) = P(X = 0) = P(DD) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) =$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9} = 0.22(2)$$

$$f_X(1) = P(X = 1) = P(\{ND, DN\}) = P(N_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap N_2) =$$

$$= P(N_1)P(D_2|N_1) + P(D_1)P(N_2|D_1) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{9} = 0.55(5)$$

$$f_X(2) = P(X = 2) = P(NN) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2|N_1) =$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9} = 0.22(2)$$

## Exemplo (Exerc. 14b - *cont.*)

Então a função de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}, & \text{se } x = 0 \vee x = 2 \\[2ex] \dfrac{5}{9}, & \text{se } x = 1 \\[2ex] 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

ou por

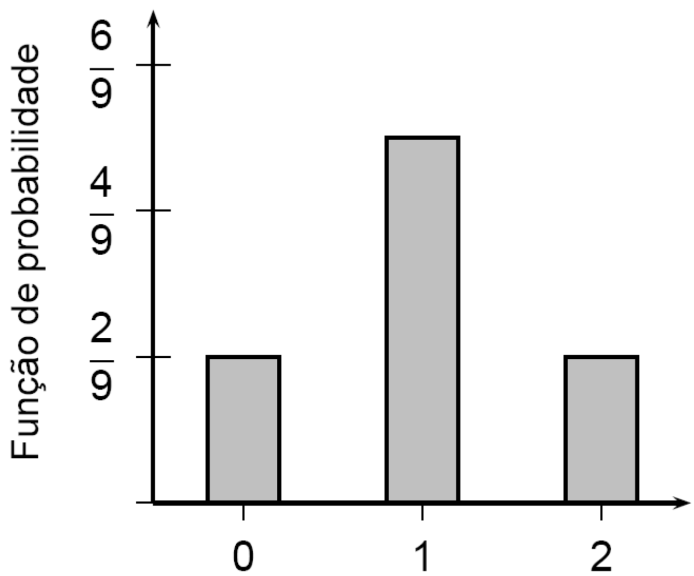
| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f_X(x)$ | $2/9$ | $5/9$ | $2/9$ |

Note que,

$$0 \leq f_X(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = 1$$

Representação gráfica da função de probabilidade do exemplo anterior:



## Definição

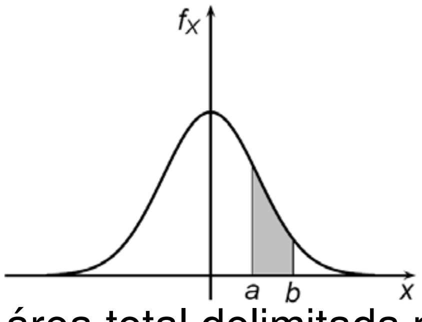
Uma variável aleatória X diz-se (absolutamente) continua se existe uma função $f_X(x)$ não negativa $(f_X x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R})$ e integrável com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1,$$

tal que:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx, \ \ \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

A função $f_X$ é a função densidade de probabilidade (f.d.p.) da variável aleatória X.




Área a sombreado = $P(X \in ]a, b]) = P(X \in ]a, b[) = P(X \in [a, b]) = P(X \in [a, b[)$

A área total delimitada pela curva da função densidade e pelo eixo das abcissas é igual a um.

Para uma variável aleatória absolutamente contínua a probabilidade de $X = x_0$ é sempre igual a zero, isto é, $P(X = x_0) = 0$ qualquer que seja o ponto $x_0$.

## Exemplo (Exerc. 15)

O director de compras da empresa "Baratinho", pretende definir uma política de aquisição de matéria prima para o próximo ano. As necessidades de matéria prima por dia (em toneladas) são uma variável contínua com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & 0 < x < k \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine $k$ de forma a que a função $f_X(x)$ seja uma função densidade de probabilidade:

## Exemplo (Exerc. 15 - *cont.*)

Começaremos pela 1ª propriedade $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{k}(1 - \frac{x}{2})dx + \int_{k}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{k}(1-\frac{x}{2})dx = 1 \Leftrightarrow \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^k = 1 \Leftrightarrow k-\frac{k^2}{4} = 1 \Leftrightarrow k^2-4k+4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Leftrightarrow k = 2$$

Logo $f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$

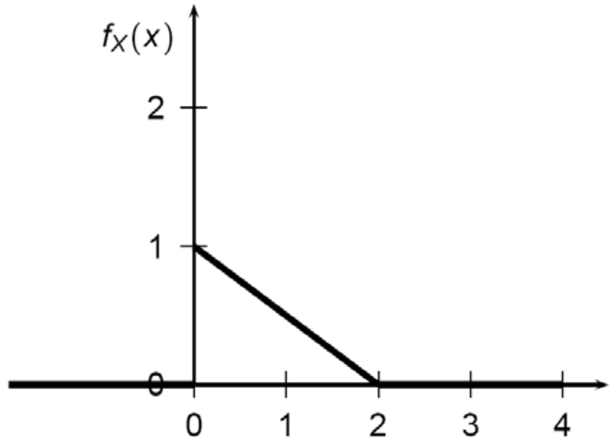
### Exemplo (Exerc. 15 - *cont.*)

Mostremos agora que $f_X(x)$ também satisfaz a 2ª propriedade $(f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R})$

| | |
|---|---|
| para $0 < x < 2$, | $0 < f_X(x) = 1 - \frac{x}{2} < 1$ |
| para outros valores | $f_X(x) = 0$ |

Logo $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Na figura seguinte temos a representação gráfica de $f_X(x)$




# Função de Distribuição

### Definição

Chama-se função de distribuição (cumulativa) de uma variável aleatória X (discreta ou contínua) à função:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

que satisfaz :
$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Se $X$ é absolutamente contínua, de

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

vem

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

para todo o ponto $x$ onde $F_X(x)$ é diferenciável.

## Propriedades da função de distribuição

- $F_X$ é uma função não decrescente, isto é,

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b);$$

- $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0;$
- $F_X(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1;$
- $F_X$ é uma função contínua à direita em qualquer ponto de $\mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{h \to 0} F_X(x + h) = F_X(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

## Exemplo (Exerc. 14b - *cont.*)

Função de distribuição cumulativa:

Para os pontos $x = 0, \ x = 1, \ x = 2$:

$$F_X(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = f_X(0) = \frac{2}{9}$$

$$F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

## Exemplo (Exerc. 14b - *cont.*)

Para outros valor de $x \in \mathbb{R}$

Se $x < 0$, tem-se $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$

Se $0 \leq x < 1$, tem-se
$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = f_X(0) = \frac{2}{9}$

Se $1 \leq x < 2$, tem-se

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$

Se $x \geq 2$, tem-se

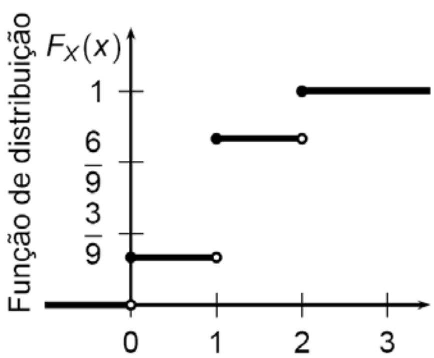
$$F_X(x) = P(X \geq x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

## Exemplo (Exerc. 14b - *cont.*)

Resumindo,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2/9, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 7/9, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Graficamente,



A função de distribuição de uma variável aleatória discreta é uma função em escada, descontinua à esquerda nos pontos onde a variável aleatória toma valores

## Exemplo (Exerc. 15 - *cont.*)

Função de distribuição cumulativa:

Se $x < 0$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

Se $0 \leq x < 2$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} f_X(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 1 - \frac{t}{2}dt = 0 + \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{4}$$

## Exemplo (Exerc. 15 - *cont.*)

Se $x \geq 2$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{2} f_X(t)dt + \int_{2}^{x} f_X(t$$

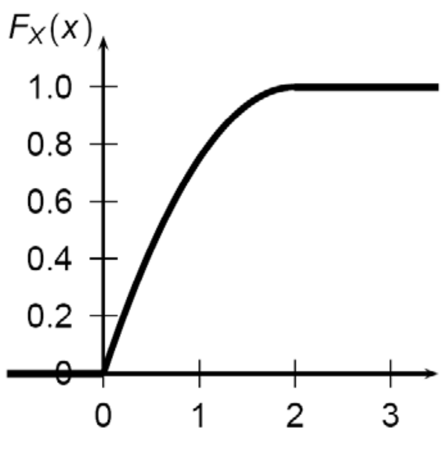
$$= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} 1 - \frac{t}{2}dt + \int_{2}^{x} 0dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

## Exemplo (Exerc. 15 - *cont.*)

Resumindo,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Graficamente,



A função de distribuição de uma variável aleatória ( absolutamente ) contínua, além de contínua à direita é continua à esquerda em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$, sendo por isso contínua em todo o ponto $x \in \mathbb{R}$

## Exercício (Exerc. 15 - *cont.*)

Relembramos que $X$ representa a necessidade diária de matéria prima da empresa "Baratinho"(em toneladas) e que a sua função densidade de probabilidade é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

Se se quiser que a probabilidade de ruptura da matéria prima seja igual a 0.02, qual o nível de abastecimento que deve ser assegurado diariamente ?

Sol:1.72 toneladas

As distribuições de probabilidade contêm toda a informação acerca das propriedades probabilísticas de uma variável aleatória.

No entanto, por vezes , é necessário sumariar algumas características através de uma medida.
Uma dessas medidas é a média, valor esperado ou esperança matemática.

## Definição

Denomina-se média, valor esperado ou esperança matemática de uma variável aleatória X, ao número $\mu_X$ ou $E(X)$ definido por:

$$E(X) = \mu_X = \sum_i x_i f_X(x_i) \, ,$$

se X é discreta com função de probabilidade $f_X$ e tomando valores em $\{x_1, x_2, ...\}$; ou por

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \, ,$$

se X é (absolutamente) contínua com função densidade de probabilidade $f_X$.

Na definição anterior, se a série, no caso discreto, não for convergente ou, no caso contínuo, se o integral não for convergente, dizemos que o valor esperado não existe.

# Valor Esperado de uma função de X

Seja $g$ uma f.r.v.r e $g(X)$ uma v.a. construída a partir de outra do mesmo tipo $X$

### Definição

Se $X$ é uma v. a. discreta podendo assumir os valores $x_1, x_2, ...,$ então

$$E(g(X)) = \mu_{g(X)} = \sum_i g(x_i) f_X(x_i)$$

onde $f_X$ é a função de probabilidade da v. a. $X$.

### Definição

Se $X$ é uma v. a contínua, então

$$E(g(X)) = \mu_{g(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

onde $f_X$ é a função densidade de probabilidade da v. a. $X$.

# Exemplo/Exercicio

### Exercício

Calcule $E(X)$ para os exemplos anteriormente considerados.

Para o Exerc. 14: $E(X) = 1$

Para o Exerc. 15: $E(X) = 2/3$

# Propriedades do valor esperado

## Propriedades do Valor Esperado

Sejam X e Y variáveis aleatórias e a,b e c constantes reais. Então:

- $E(c) = c$
- $E(cX) = cE(X)$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$;
- Se $X(\omega) \leq Y(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$, então $E(X) \leq E(Y)$

## Definição

Seja X uma v.a. de valor esperado $\mu_X$. Define-se a variância de X, $\sigma_X^2$ ou Var(X), por

$$Var(X) \equiv \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f_X(x_i) = E\left((X - \mu_X)^2\right) ,$$

se X é discreta com função de probabilidade $f_X$ e tomando valores em $\{x_1, x_2, ...\}$; ou por

$$Var(X) \equiv \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = E\left((X - \mu_X)^2\right) ,$$

se X é (absolutamente) continua com função densidade de probabilidade $f_X$

Na definição anterior, se a série, no caso discreto, não for convergente ou, no caso contínuo, se o integral não for convergente, dizemos que o valor esperado não existe.

# Exemplo/Exercicio

**Exercício**

Calcule $Var(X)$ para os exemplos anteriormente considerados.

Para o Exerc. 14: $Var(X) = 4/9$

Para o Exerc. 15: $Var(X) = 2/9$

# Propriedades da Variância

**Propriedades da Variância**

Seja X uma variável aleatória e a,b e c constantes reais. Então:

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $Var(c) = 0$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$;

**Definição**

À raiz quadrada positiva da variância chamamos desvio padrão e representamos por $\sigma_X$:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

# Vector aleatório

### Definição

$(X_1, X_2, ..., X_k)$ é um vector aleatório de dimensão $k$ ou uma variável aleatória $k$-dimensional se $X_1, X_2, ..., X_k$ forem $k$ variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço amostral $\Omega$.

### Nota:

Ao longo do semestre iremos trabalhar apenas com o caso bidimensional, isto é, vectores aleatórios de dimensão 2.

# Função de distribuição conjunta

A distribuição de probabilidades do vector aleatório $(X, Y)$, pode ser caracterizada pela sua função de distribuição, à qual se dá o nome de função de distribuição (cumulativa) conjunta das variáveis aleatórias $X$ e $Y$. Esta representa-se por $F_{(X,Y)}(.,.)$ ou por $F_{X,Y}(.,.)$ e é definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)], \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

As funções de distribuição $F_X$ e $F_Y$, de $X$ e de $Y$, respectivamente, são designadas por funções de distribuição marginais.

# Independência de Variáveis Aleatórias

O conceito de variáveis aleatórias independentes X e Y define-se de forma análoga ao conceito de independência de dois eventos A e B.

De forma intuitiva, X e Y são variáveis aleatórias independentes, quando o resultado de X não influenciar o resultado de Y, e vice-versa.

Duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$, com função de distribuição conjunta $F_{X,Y}$ são independentes se e só se

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

onde $F_X$ e $F_Y$ são as funções de distribuição marginais de $X$ e de $Y$, respectivamente.

## Algumas consequências...

Se X e Y são v.a. independentes, então:

- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$