



Instituto Superior Politécnico de Viseu
Escola Superior de Tecnologia de Viseu
Curso de Engenharia de Sistemas e Informática

Processamento Digital de Sinal

Aula 4

4.º Ano – 2.º Semestre

Manuel A. E. Baptista, Eng.º

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Departamento de Informática

www.estv.ipv.pt

1

Programa:

1. Introdução ao Processamento Digital de Sinal
2. Representação e Análise de Sinais
3. Estruturas e Projecto de Filtros FIR e IIR
4. Processamento de Imagem
5. Processadores Digitais de Sinal

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Departamento de Informática

www.estv.ipv.pt

2

Bibliografia:

Processamento Digital de Sinal:

- Sanjit K. Mitra, “**Digital Signal Processing** – A computer based approach”, McGraw Hill, 1998
Cota: 621.391 MIT DIG
- Roman Kuc, “**Introduction to Digital Signal Processing**”, McGraw Hill, 1988.
Cota: 621.391 KUC INT
- Johnny R. Johnson, “**Introduction to Digital Signal Processing**”, Prentice-Hall, 1989.
Cota: 621.391 JOH INT
- G. Proakis, G. Manolakis, “**Digital Signal Processing – Principles, Algorithms Applications**”, 3ª Ed, P-Hall, 1996.
Cota: 621.391 PRO DIG
- James V. Candy, “**Signal Processing – The modern Approach**”, McGraw-Hill, 1988
Cota: 621.391 CAN SIG
- Mark J. T., Russel M., “**Introduction to DSP – A computer Laboratory Textbook**”, John Wiley & Sons, 1992.
Cota: 621.391 SMI INT
- James H. McClellan e outros, “**Computer-Based Exercises - Signal Proc. Using Matlab 5**”, Prentice-Hall, 1998.
Cota: 621.391 MCC COM

Processamento Digital de Imagem:

- Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods, “**Digital Image Processing**”, Prentice Hall, 2ª Ed., 2002.
Cota: 681.5 GON DIG.
- I. Pittas H. McClellan e outros, “**Digital Image Processing Algorithms and Applications**”, John Wiley & Sons, 2000.
Cota: 621.391 PIT.
- William K. Pratt, “**Digital image processing**”, John Wiley, 2ª Ed, 1991.
Cota: 681.5 PRA DIG
- Bernd Jähne, “**Digital image processing : concepts, algorithms, and scientific applications**”, Springer, 1997.
Cota: 681.5 JAH

Avaliação:

A avaliação é composta pela componente teórica e componente prática ponderadas da seguinte forma:

$$\text{Classificação Final} = 80\% * \text{Frequência ou exame} + 20\% * \text{Prática}$$

O acesso ao exame não está condicionado embora não tenha função de melhoria, ou seja, se o aluno entregar a prova de exame, será essa a classificação a utilizar no cálculo da média final independentemente da nota da prova de frequência obtida.

A avaliação prática é constituída por trabalhos laboratoriais a executar em MATLAB

2. Representação e Análise de Sinais (cont.)

• Análise de Fourier

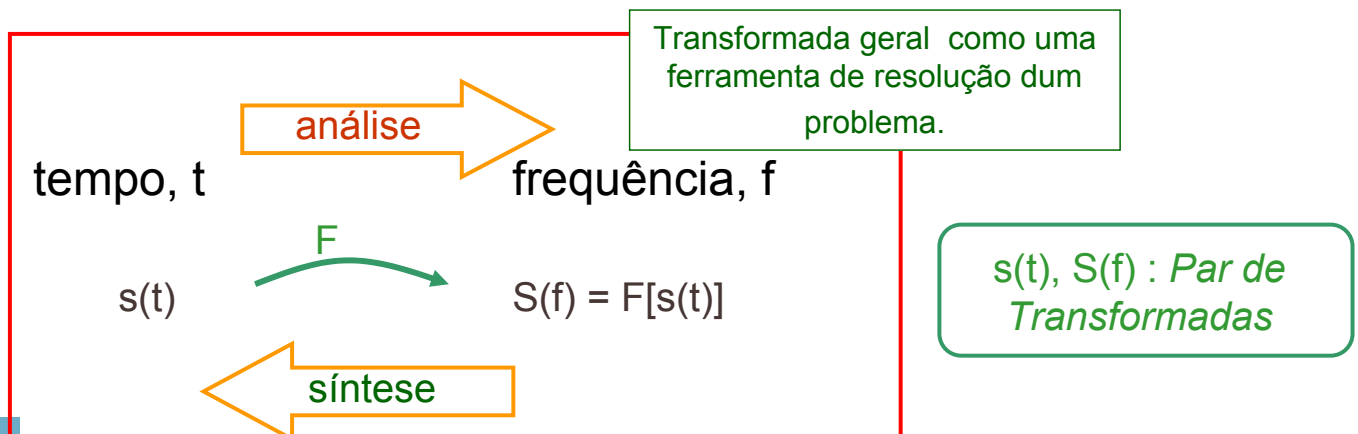
- Transformada de Fourier (FT)
- FT & *generalised impulse*
- Princípio da Incerteza
- Transformada Discreta de Fourier no Tempo (DTFT)
- Transformada Discreta de Fourier (DFT)
- Comparação: DFS, DTFT & DFT
- DFT *leakage & coherent sampling*

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Análise de Fourier: Porquê?

- Rápida & eficiente inspecção nos blocos de construção do sinal.
- Simplificação do Problema Original - ex.: resolução de Eq. Diferenciais.
- Poderosa & complementar às técnicas de análise no domínio do tempo.
- Várias transformadas em *DSPing*: Fourier, Laplace, z, etc.



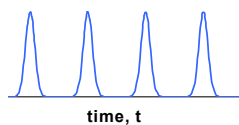
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Análise de Fourier - ferramentas

Sinal de Entrada no Tempo

Espectro de Frequência

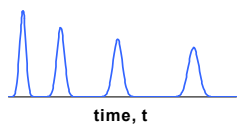


Contínuo

Periódico (período T) **FS**

Discreto

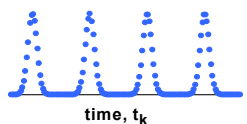
$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$



Aperiódico **FT**

Contínuo

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

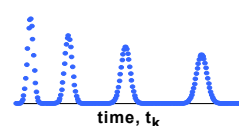


Discreto

Periódico (período T) **DFS****

Discreto

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$



Aperiódico { **DTFT** Continuo
DFT** Discreto

Contínuo

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

Nota: $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi/T$, $s[n]=s(t_n)$, $N = \text{No. of samples}$

** Calculado via FFT



Integral de Fourier (FI)

Ferramentas de Análise de Fourier para sinais aperiódicos.

Teorema do Integral de Fourier

Any aperiodic signal $s(t)$ can be expressed as a Fourier integral if $s(t)$ piecewise smooth⁽¹⁾ in any finite interval $(-L, L)$ and absolute integrable⁽²⁾.

- (1) $s(t)$ contínuo,
 $s'(t)$ monótona

- (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < +\infty$

$$s(t) = \int_0^{+\infty} \{A(\omega) \cdot \cos(\omega t) + B(\omega) \cdot \sin(\omega t)\} d\omega \quad (3)$$

$$(3) \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega t) dt \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(\omega t) dt$$

Ligação Real-Complexo

$$S(\omega) = \pi \cdot [A(\omega) - j \cdot B(\omega)]$$

Forma Complexa

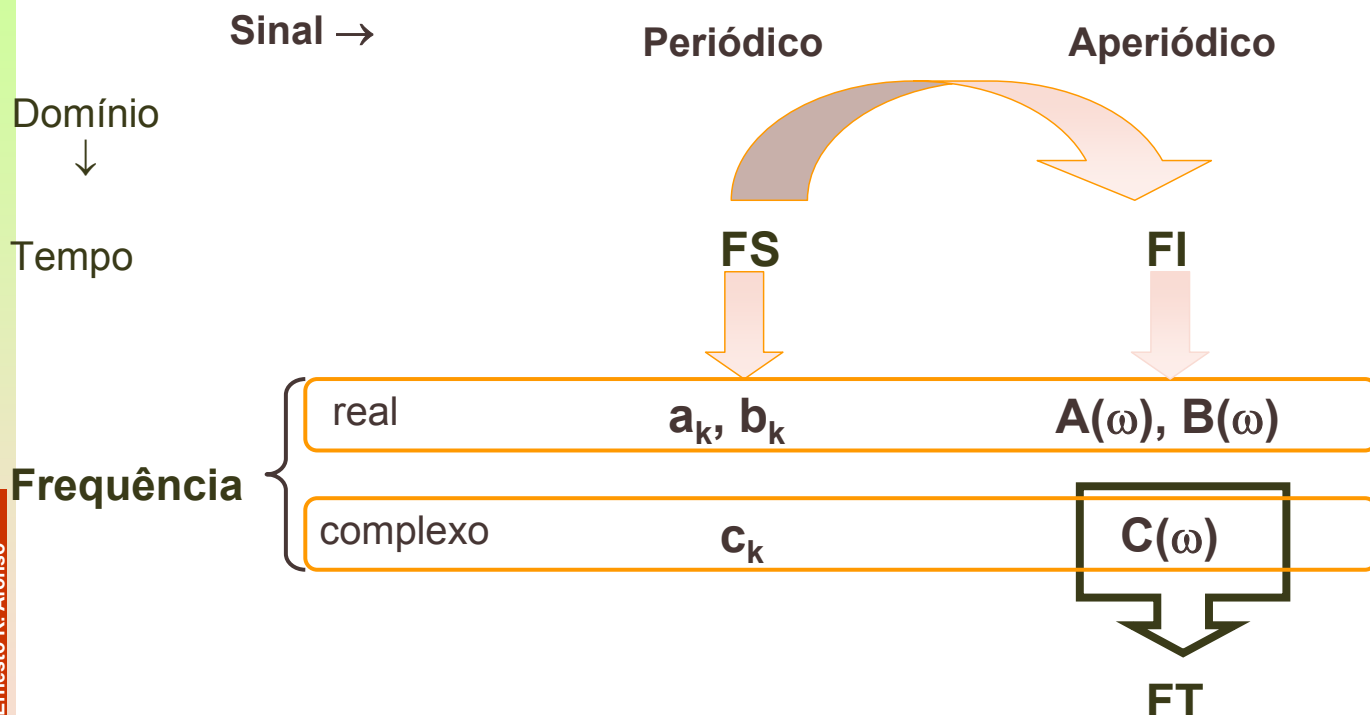
análise $S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

síntese $s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

Par de Transformadas - FT



Resumo



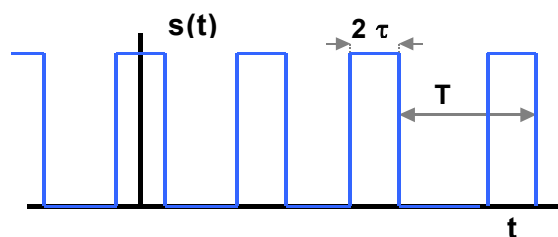
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



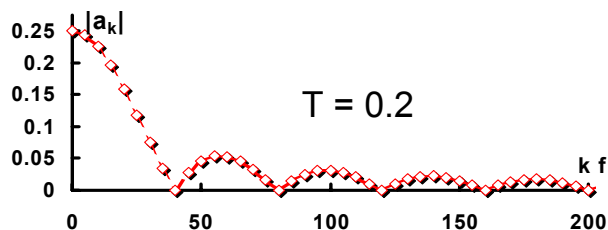
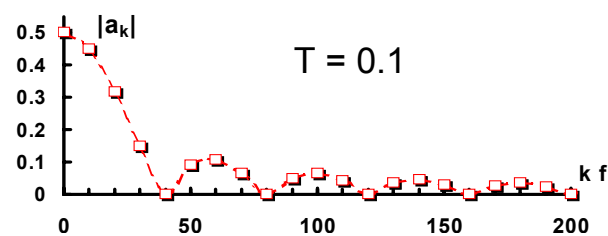
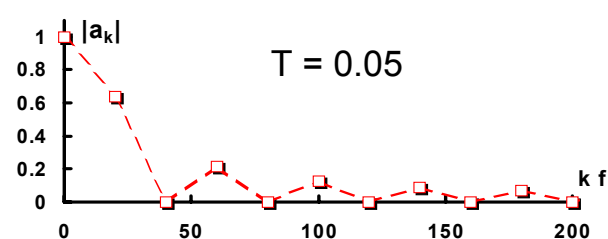
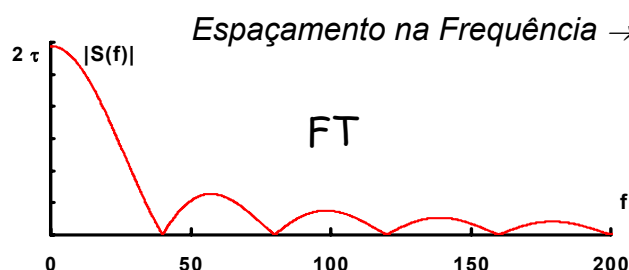
Da Série - FS para a Transformada - FT

FS tende para FT quando o período T aumenta:

$\rightarrow$ espectro contínuo



Trem de impulsos, largura $2\tau = 0.025$



Nota: $|a_k| \rightarrow 2a_0$ com $k \rightarrow 0 \Rightarrow 2a_0$ é traçado em $k=0$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Obtenção da FT a partir da FS

Definição de **FS**

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t}$$

$\Delta f = \Delta\omega/(2\pi) = 1/T$
espaçamento na frequência

2

$$\Gamma_{\omega_k} \equiv \frac{c_{\omega_k}}{\Delta f} = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-j\omega_k t} dt$$

$$s(t) = \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} \Gamma_{\omega_k} \cdot e^{j\omega_k t} \Delta f$$

Com $\Delta f \rightarrow 0$, troca-se Δf , ω_k , $\sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty}$
por df , $2\pi f$, $\int_{-\infty}^{+\infty}$

1

$$c_k = \Delta f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-j\omega_k t} dt \equiv c_{\omega_k}$$

$$s(t) = \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} c_{\omega_k} \cdot e^{j\omega_k t}$$

Definição de **FT**

$$S(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \Gamma_{\omega_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



FT & Delta de Dirac

Definição de δ Dirac

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \neq t_0 \\ \text{undefined}, & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_a^b y(t) \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} y(t_0), & \text{if } a < t_0 < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

A FT dum impulso δ (Dirac) é uma exponencial complexa

Assim $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \delta(t-t_0) dt = y(t_0)$

FT do Dirac δ

$$FT\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}$$

propriedade

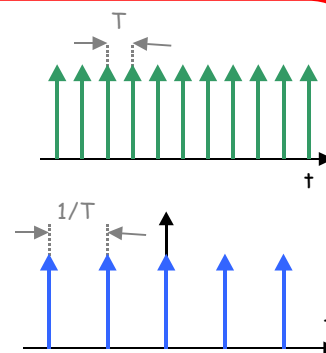
$$FT\{e^{j\alpha t}\} = 2\pi \delta(\omega - \alpha)$$

FT dum trem infinito de impulsos δ :

$$FT\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm\omega T} = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} \cdot m)$$

i.e: Função de Amostragem, $\text{Shah}(T) = \mathcal{U}(T)$ ou "comb"

Nota: δ & $\mathcal{U}$ = funções "generalizadas"



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Transformada de Fourier - FT - Propriedades

	Tempo	Frequência
Linearidade	$a \cdot s(t) + b \cdot u(t)$	$a \cdot S(f) + b \cdot U(f)$
Multiplicação	$s(t) \cdot u(t)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f - \bar{f}) U(\bar{f}) d\bar{f}$
Convolução	$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \bar{t}) u(\bar{t}) d\bar{t}$	$\bar{S}(\bar{f}) \cdot U(f)$
Deslocamento em t	$s(t - \bar{t})$	$e^{-j 2\pi f \bar{t}} \cdot S(f)$
Deslocamento em f	$e^{+j 2\pi \bar{f}} \cdot s(t)$	$S(f - \bar{f})$
Inversão no Tempo	$s(-t)$	$S(-f)$
Diferenciação	$\frac{ds(t)}{dt}$	$j 2\pi f S(f)$
Identidade de Parseval	$\int h(t) g^*(t) dt = \int H(f) G^*(f) df$	
Integração	$\int_{-\infty}^t s(u) du$	$S(f)/(j 2\pi f)$
Energia & Parseval's (E is t-to-f invariant)	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) ^2 dt$	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) ^2 df$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



FT – Princípio da Incerteza

Teorema Larg. Banda

Para duração efectiva Δt & Larg. de Banda Δf

$$\exists \gamma > 0 \quad \Delta t \cdot \Delta f \geq \gamma$$

Produto incerteza

Princípio da Incerteza de Fourier

Para Sinais de Energia:

$$E = \int |s(t)|^2 dt = \int |S(f)|^2 df < \infty$$

Define valores médios

$$\bar{t}^2 = \frac{1}{E} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |s(t)|^2 dt \quad \bar{f}^2 = \frac{1}{E} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot |S(f)|^2 df$$

Define desv. pad

$$\Delta t^2 = \frac{1}{E} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t}) \cdot |s(t)|^2 dt \quad \Delta f^2 = \frac{1}{E} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (f - \bar{f}) \cdot |S(f)|^2 df$$

$$\Rightarrow \Delta t \cdot \Delta f \geq 1/4\pi$$

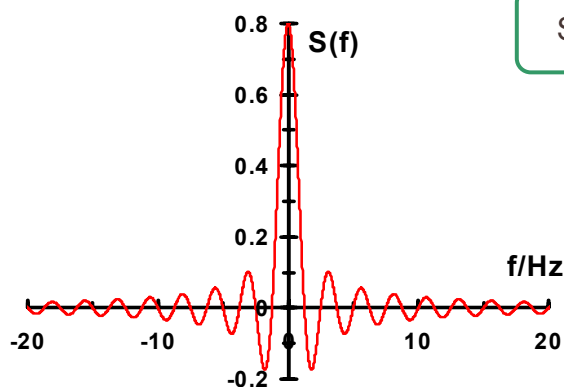
Implicações

- Limited accuracy on simultaneous observation of $s(t)$ & $S(f)$.
- Good time resolution (small Δt) requires large bandwidth Δf & vice-versa.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

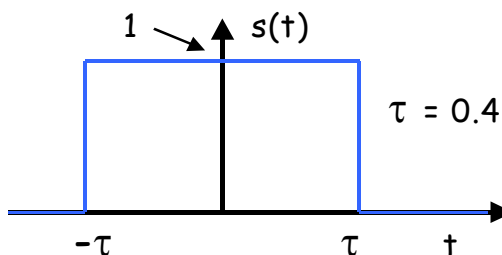


FT - Exemplo



$$S(f) = 2\tau s_{\text{MAX}} \text{sinc}(2f\tau)$$

FT de 2τ -Janela Rectangular



Incerteza de Fourier

Escolha

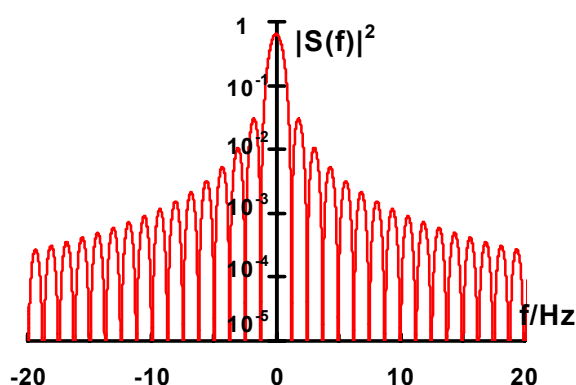
$$\Delta t = |\int s(t)/s(0) dt| = 2\tau,$$

$$\Delta f = |\int S(f)/S(0) df| = 1/(2\tau) = \text{metade da distância entre os 2 primeiros zeros } (f_{1,-1} = \pm 1/2\tau) \text{ of } S(f)$$

$$\text{então: } \Delta t \cdot \Delta f = 1$$

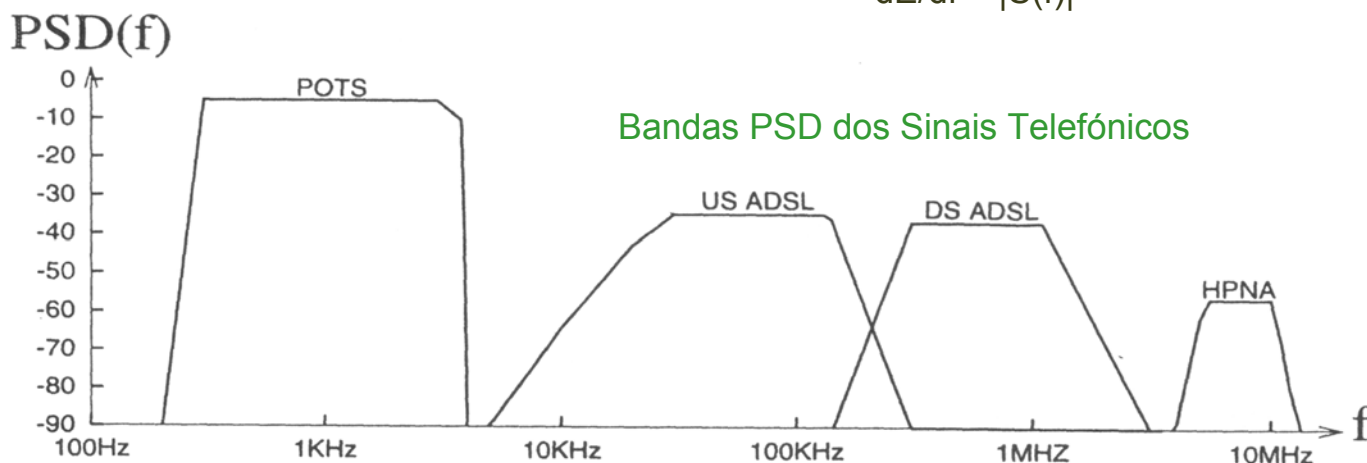
Gráfico Power Spectral Density (PSD) vs. Frequência f .

Note: As fases não são importantes



FT – Espectro de Potência

Power Spectral Density, $\text{PSD}(f)$
 $= dE/df = |S(f)|^2$



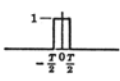
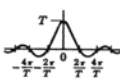
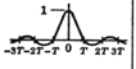
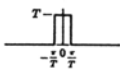
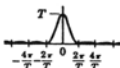
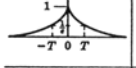
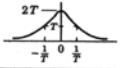
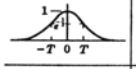
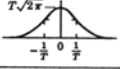
Bandas PSD dos Sinais Telefónicos

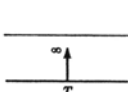
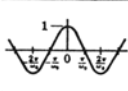
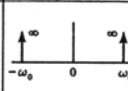
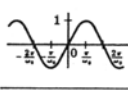
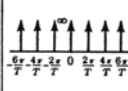
POTS = Voice/Fax/modem Phone
 HPNA = Home Phone Network

US = Upstream
 DS = Downstream

A partir do espectro de potência, pode-se saber se os sinais coexistem sem interferirem.

FT – Formas de Onda mais importantes

	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_p(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$	$F_p(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	
	$\text{rect } \frac{t}{T} = \begin{cases} 1 & (t < T/2) \\ 0 & (t > T/2) \end{cases}$	$T \text{sinc } \frac{\omega T}{2} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	
	$\text{sinc } \frac{t}{T} = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$	$T \text{rect } \frac{\omega T}{2} = \begin{cases} T & (\omega < \frac{\pi}{T}) \\ 0 & (\omega > \frac{\pi}{T}) \end{cases}$	
	$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{T} & (t < T) \\ 0 & (t \geq T) \end{cases}$	$T \text{sinc}^2 \frac{\omega T}{2} = T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2$	
	$e^{-\frac{ t }{T}}$	$\frac{2T}{(\omega T)^2 + 1}$	
	$e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2}$	$\sqrt{2\pi} T e^{-\frac{1}{2} (\omega T)^2}$	

	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_p(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$	$F_p(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	
	$\delta(t - T)$	$e^{-i\omega T}$	(Complex)
	$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{i} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	(Imaginary)
	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ $= \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi j \frac{t}{T}}$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi j}{T})$ $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k T}$	

Transformada Discreta de Fourier no Tempo - DTFT

DTFT definida como:

Nota: domínio contínuo da frequência! (função densidade da frequência)

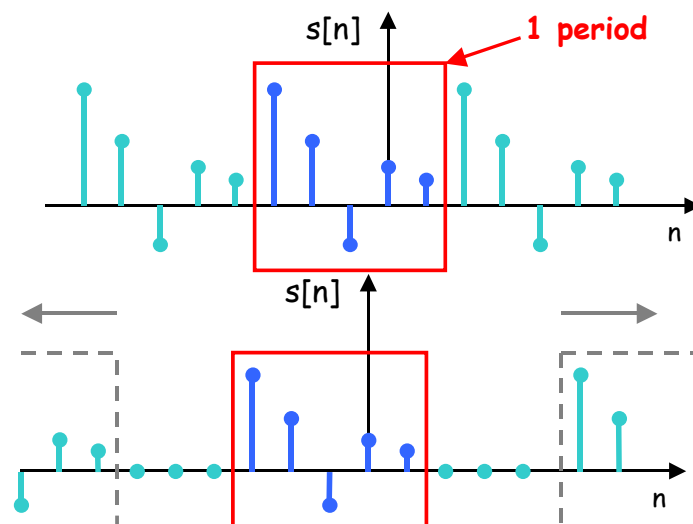
análise

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

síntese

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} S(f) e^{j2\pi f n} df$$

Para sinais aperiódicos

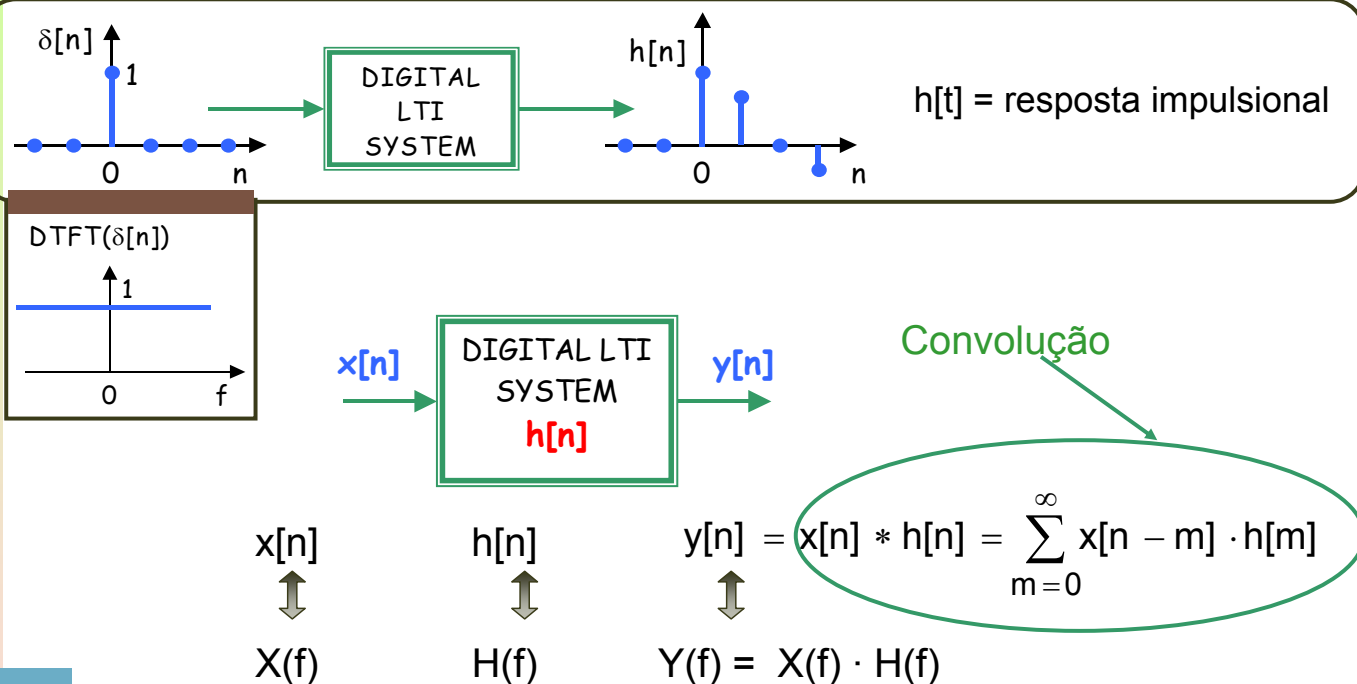


Obtida a partir DFS com $N \rightarrow \infty$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

DTFT - Convolução

Sistema Digital Linear Invariante no Tempo: obedece ao princípio da sobreposição.

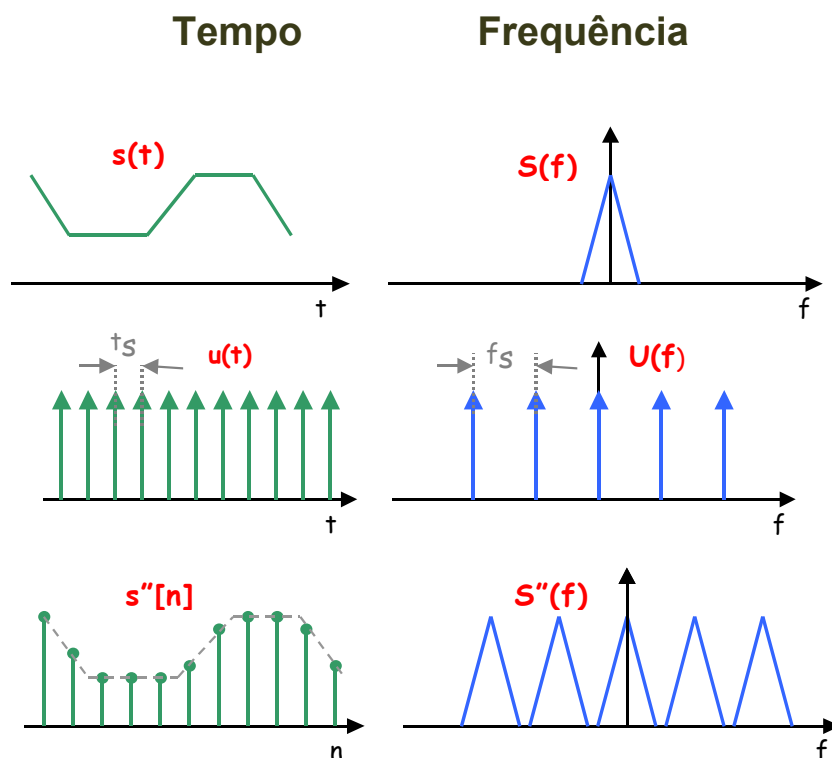
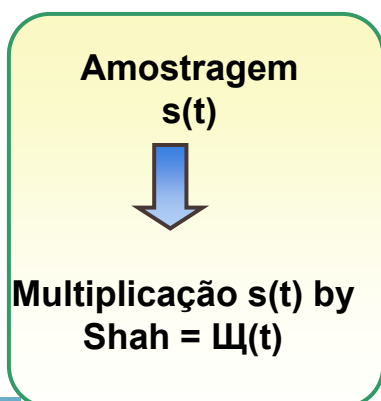


DTFT - Amostragem/Convolução

$$s[n] * u[n] \Leftrightarrow S(f) \cdot U(f) ,$$

$$s[n] \cdot u[n] \Leftrightarrow S(f) * U(f)$$

(Das propriedades da FT)



Transformada Discreta de Fourier - DFT

DFT definida como:

análise

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

síntese

$$s[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k \cdot e^{j \frac{2\pi k n}{N}}$$

Resolução na frequência

Frequências em análise f_m

$$f_m = \frac{m \cdot f_s}{N}, m = 0, 2 \dots N-1$$



Impulsos da DFT localizados nas frequências de análise f_m



DFT ~ filtros passa-banda centrados em f_m

- Aplica-se a sinais discretos no tempo e na frequência.
- A mesma forma da DFS mas para sinais aperiódicos: sinal tratado como periódico apenas para efeitos computacionais.

Nota: $\tilde{c}_{k+N} = \tilde{c}_k \Leftrightarrow$ o espectro tem período N

21

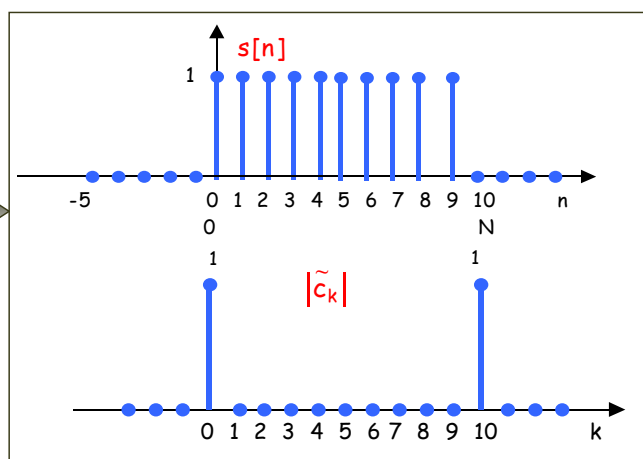
www.estv.ipv.pt

DFT - impulso & sinusóide

a) Impulso rectangular, largura N

$$r[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

$$\tilde{c}_k = (1/N) e^{-j\pi k(N-1)/N} \sin(\pi k) / \sin(\pi k/N)$$



b) Sinusóide real, frequência $f_0 = L/N$

i.e. L completa ciclos em N pontos amostrados

$$\cos[n] = \cos(j2\pi f_0 n)$$

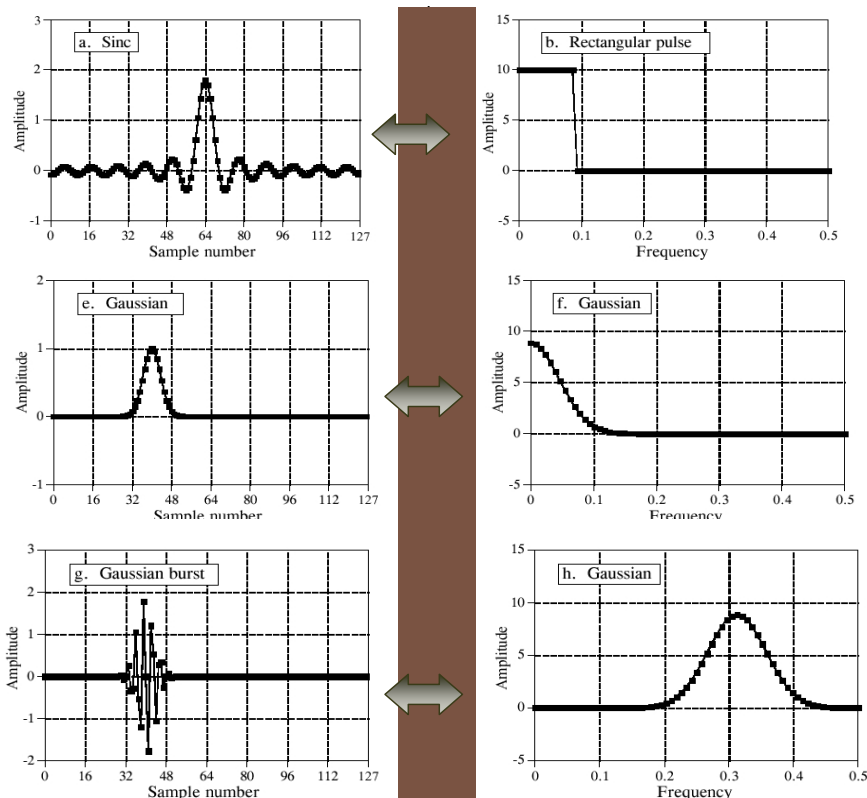
$$\tilde{c}_k = (1/N) e^{j\pi\{(Nf_0-k)-(Nf_0-k)/N\}} (1/2) \sin\{\pi(Nf_0-k)\} / \sin\{\pi(Nf_0-k)/N\} + (1/N) e^{j\pi\{(Nf_0+k)-(Nf_0+k)/N\}} (1/2) \sin\{\pi(Nf_0+k)\} / \sin\{\pi(Nf_0+k)/N\}$$

22

www.estv.ipv.pt

DFT - Exemplos

Os traçados DFT são versões amostradas da DTFT janelada.



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Departamento de Informática

23

www.estv.ipv.pt

DFT - Propriedades

Tempo

Frequência

Linearidade

$$a \cdot s[n] + b \cdot u[n]$$

$$a \cdot S(k) + b \cdot U(k)$$

Multiplicação

$$s[n] \cdot u[n]$$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{h=0}^{N-1} S(h) U(k-h)$$

Convolução

$$\sum_{m=0}^{N-1} s[m] \cdot u[n-m]$$

$$S(k) \cdot U(k)$$

Deslocamento em t

$$s[n-m]$$

$$e^{-j \frac{2\pi k \cdot m}{T}} \cdot S(k)$$

Deslocamento em f

$$e^{+j \frac{2\pi h \cdot t}{T}} \cdot s[n]$$

$$S(k-h)$$



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

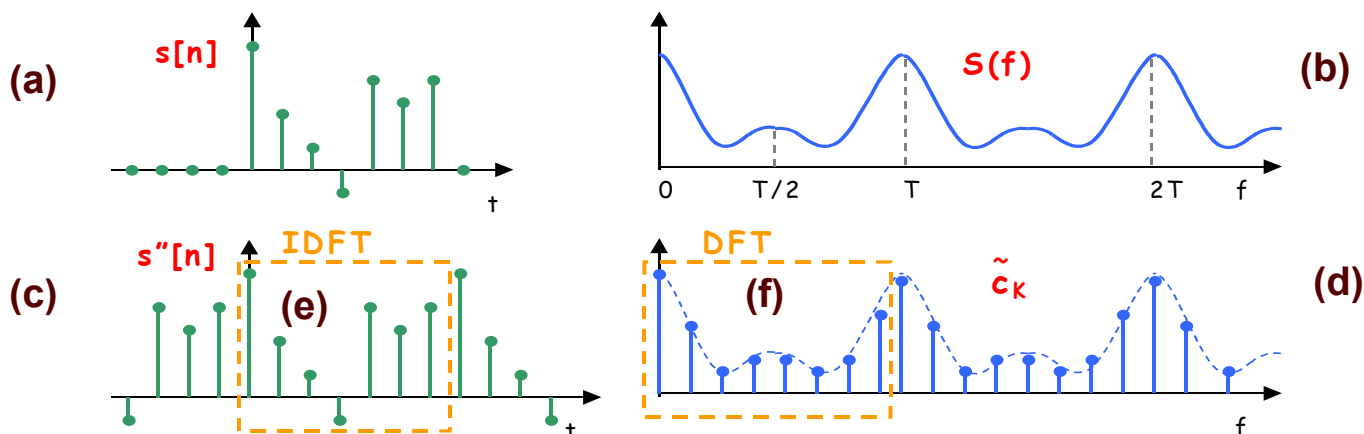


Departamento de Informática

24

www.estv.ipv.pt

DTFT vs. DFT vs. DFS



(a) Sinal discreto aperiódico.

(b) Transformada DTFT - módulo.

(c) Versão periódica de (a).

(d) Coeficientes DFS = amostras de (b).

(e) A Inversa de DFT estima um único período de $s[n]$

(f) A DFT estima um único período de (d).

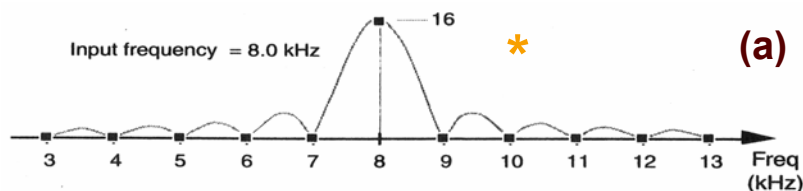
DFT – leakage

Leakage

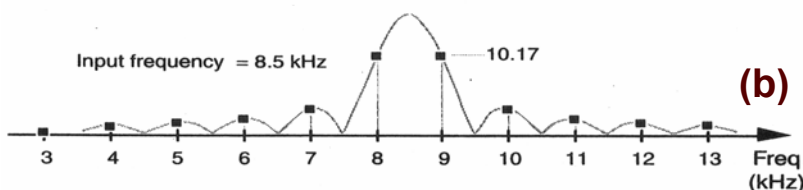
Spectral components belonging to frequencies between two successive frequency bins propagate to all bins.

Ex: 32 impulsos da DFT da sinusóide 1 V_p amostrada a f=32kHz.
Resolução/frequência 1 kHz.

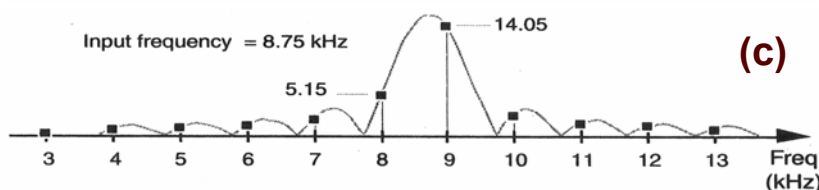
(a) Sinusóide - 8 kHz



(b) Sinusóide - 8.5 kHz



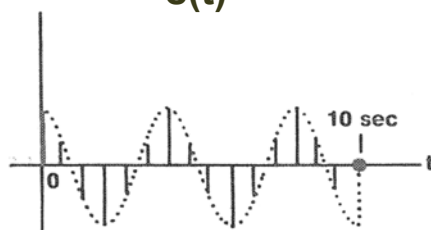
(c) Sinusóide 8.75 kHz



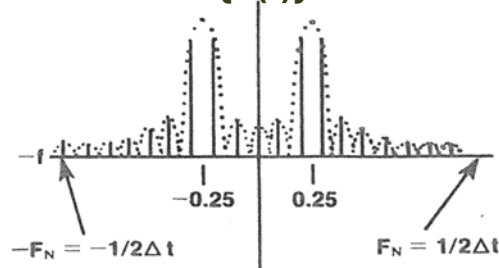
DFT – Exemplo: *leakage*

0.25 Hz - Co-seno

5. Sampled windowed wave

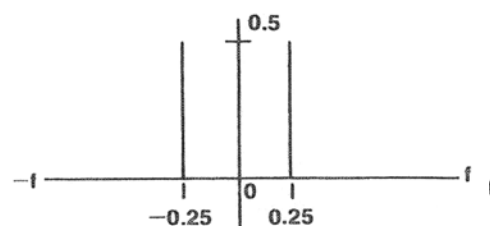
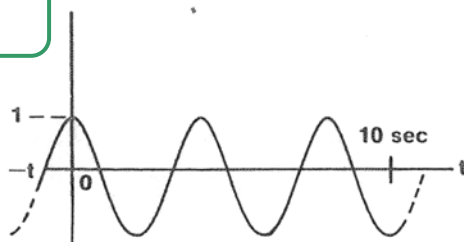


$FT\{s(t)\}$



$s[n] \cdot u[n] \Leftrightarrow S(f) * U(f)$
(Convolução)

1. Cosine wave



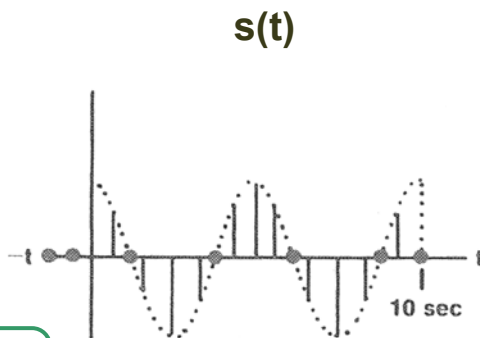
O **Leakage** é causado pela amostragem num número não inteiro de períodos!!!



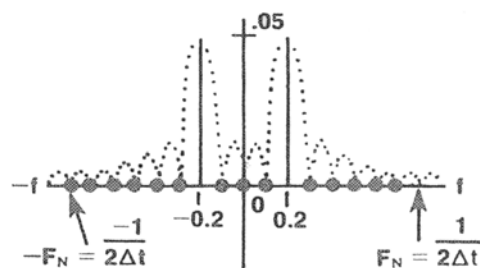
DFT – Amostragem Coerente

0.2 Hz Co-seno

5. Sampled windowed wave

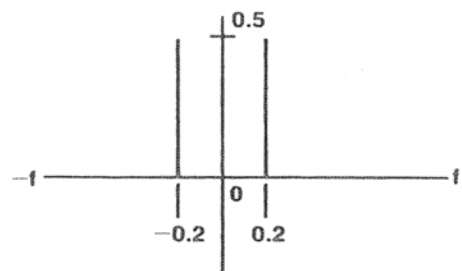
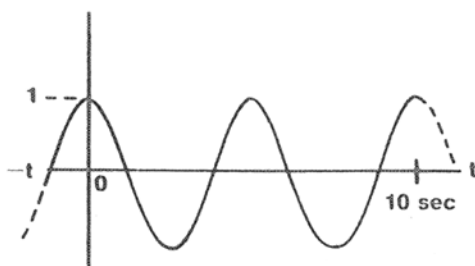


$FT\{s(t)\}$



$s[n] \cdot u[n] \Leftrightarrow S(f) * U(f)$
(Convolução)

1. Cosine wave



Coherent sampling: N_C input cycles exactly into $N_S = N_C (f_S/f_{IN})$ sampled points.



DFT - Transformada Discreta de Fourier

Considere a sequência finita $x[n]$ e a periódica associada $\tilde{x}[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \quad \text{ou} \quad \tilde{x}[n] = x[((n))_N]$$

Se comprimento de $\mathbf{x[n]} \leq \mathbf{N}$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

Pela propriedade da Dualidade da DFS

DFT - Transformada Discreta de Fourier

Temos que:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

ou $\tilde{X}[k] = X[((k))_N]$

Podemos definir a **DFT de N pontos**:

Eq. de análise:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Eq. de síntese:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

DFT - Transformada Discreta de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT(N)} X[k]$$

Interpretações:

- $\tilde{X}[k]$, DFS de $x[n]$, é uma amostragem do espectro $X(\omega)$
- $X[k]$ uma amostragem de 1 período de $X(\omega)$ espectro do sinal não periódico.
- $X[k]$ é um período do espectro $\tilde{X}[k]$ do sinal $\tilde{x}[n]$ periódico associado

DFT

DFT de um sinal contínuo não limitado no tempo

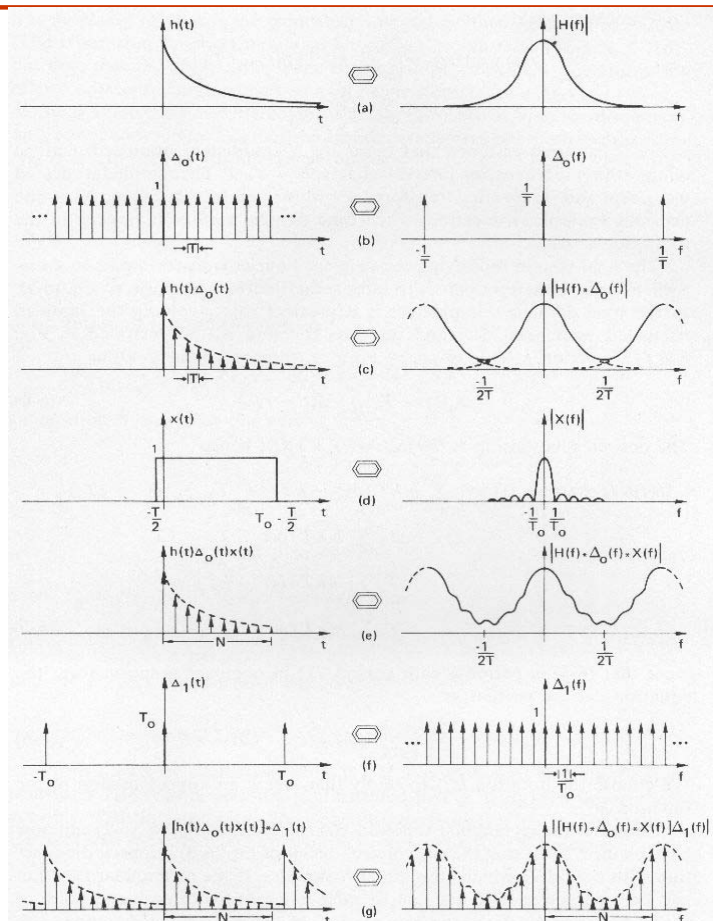


Figure 6-2. Graphical derivation of the discrete Fourier transform pair.

Exemplo:

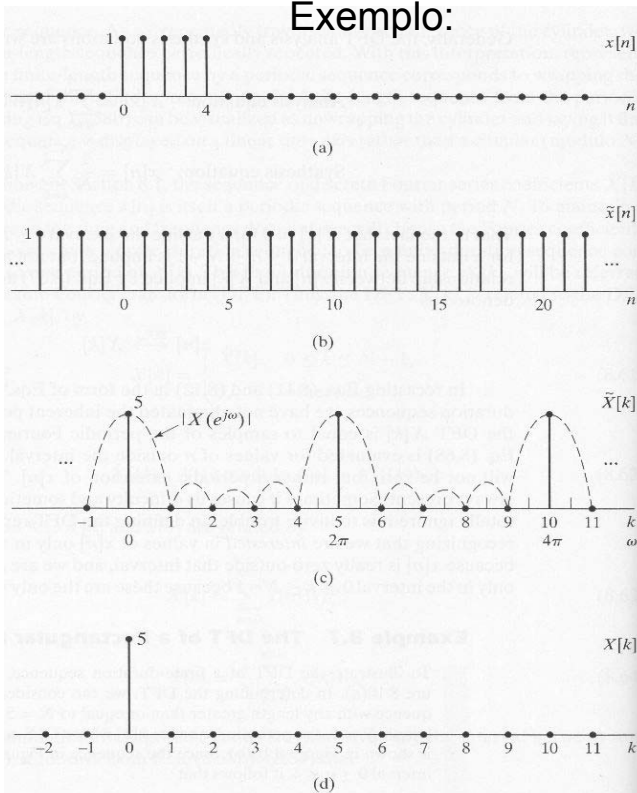
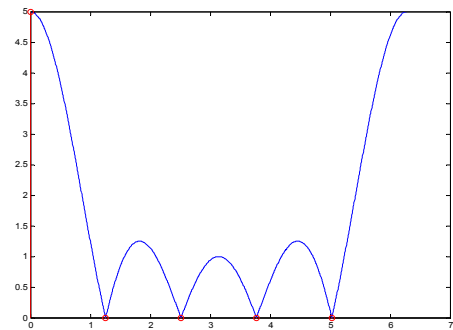


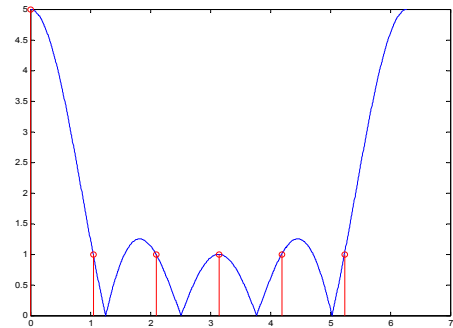
Figure 8.10 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 5$. (c) Fourier series coefficients $\tilde{X}[k]$ for $\tilde{x}[n]$. To emphasize that the Fourier series coefficients are samples of the Fourier transform, $|X(e^{j\omega})|$ is also shown. (d) DFT of $x[n]$.

aliasing

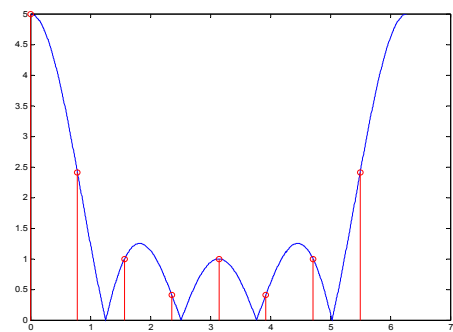
N=5



N=6

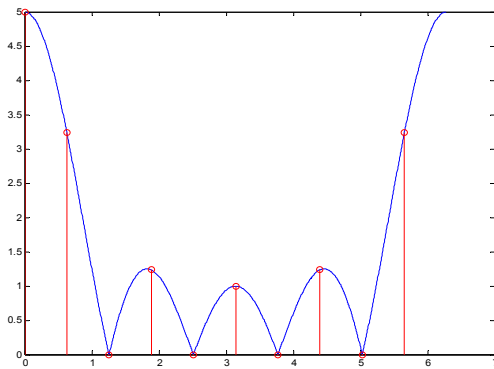


N=8

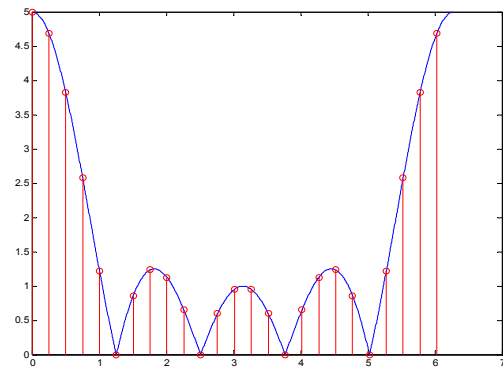


33

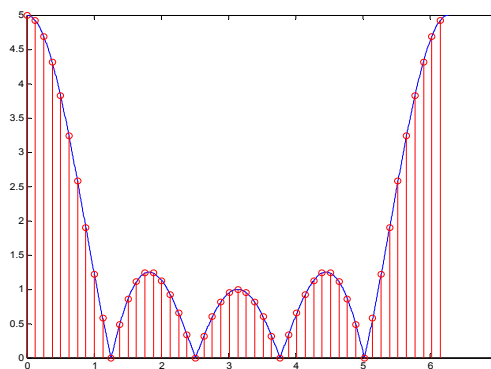
estv.ipv.pt



N=10



N=25

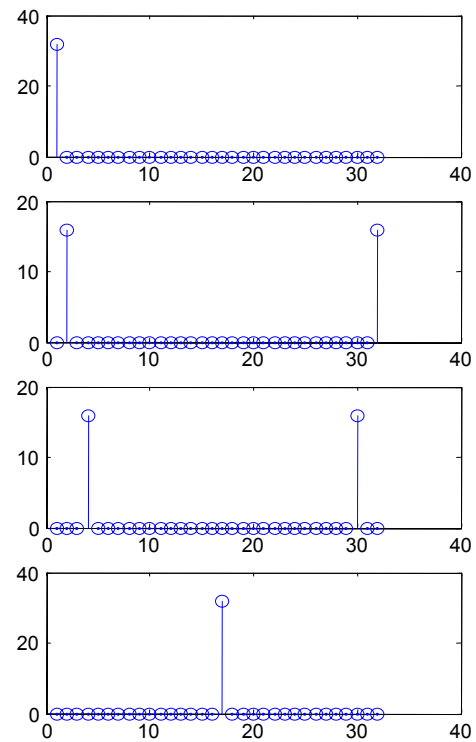
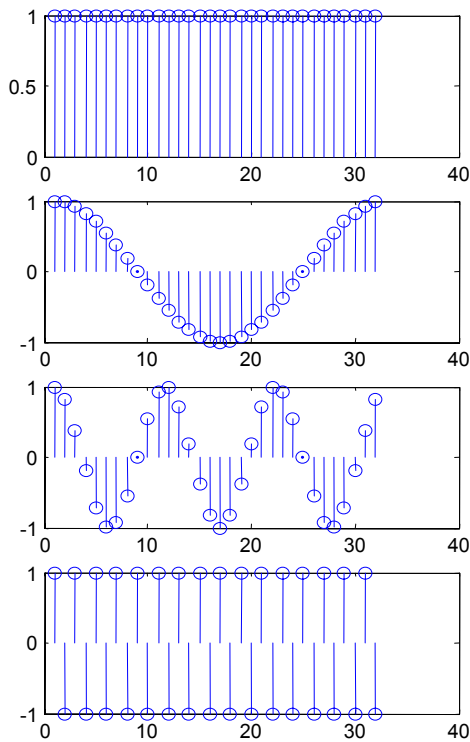


N=50

34

www.estv.ipv.pt

DFT – Sinais sinusoidais



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

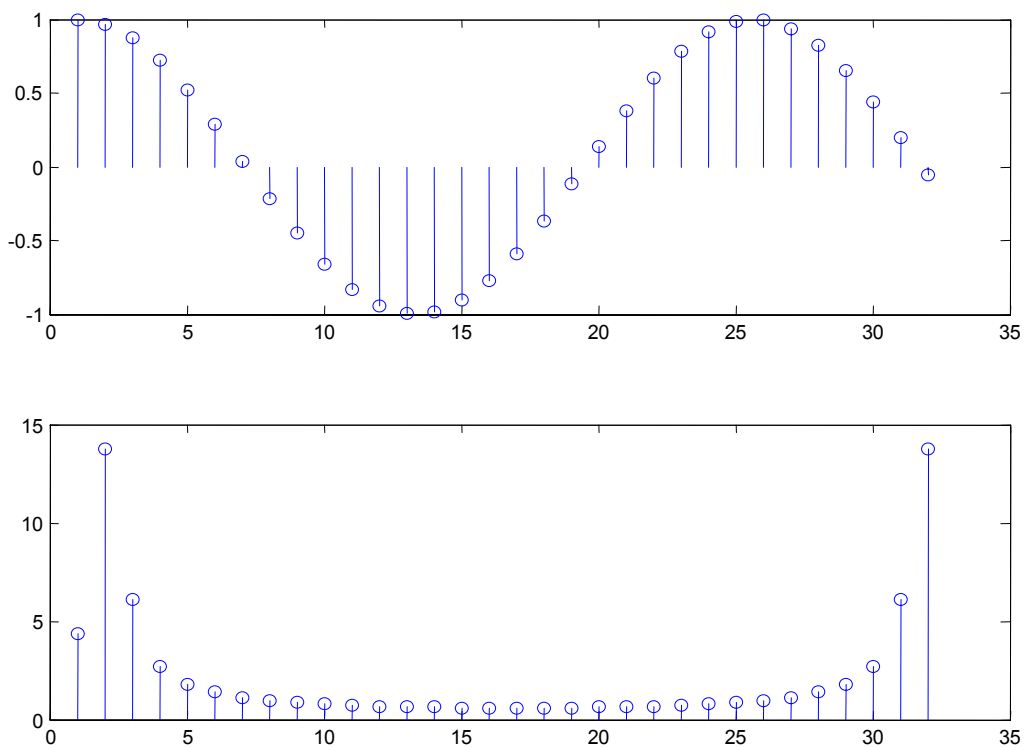


Departamento de Informática

35

www.estv.ipv.pt

Porém:



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Departamento de Informática

36

www.estv.ipv.pt

DFT Sinal limitado em frequência com limitação igual ao período.

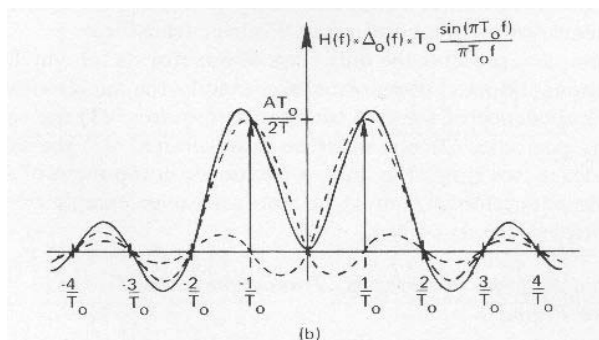


Figure 6-4. Expanded illustration of the convolution of Fig. 6-3(e).

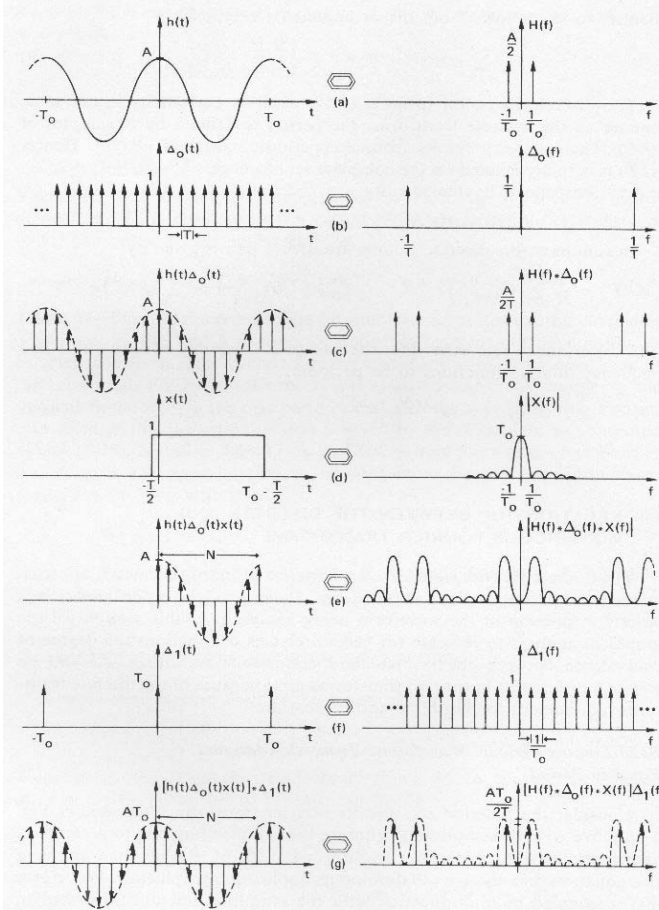


Figure 6-3. Discrete Fourier transform of a band-limited periodic waveform: truncation interval equal to period.

37

www.estv.ipv.pt

DFT Sinal limitado em frequência com limitação diferente do período.

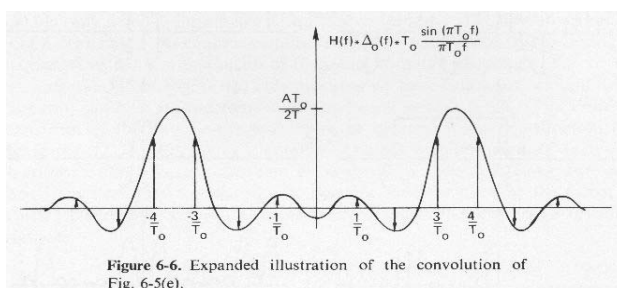


Figure 6-6. Expanded illustration of the convolution of Fig. 6-5(e).

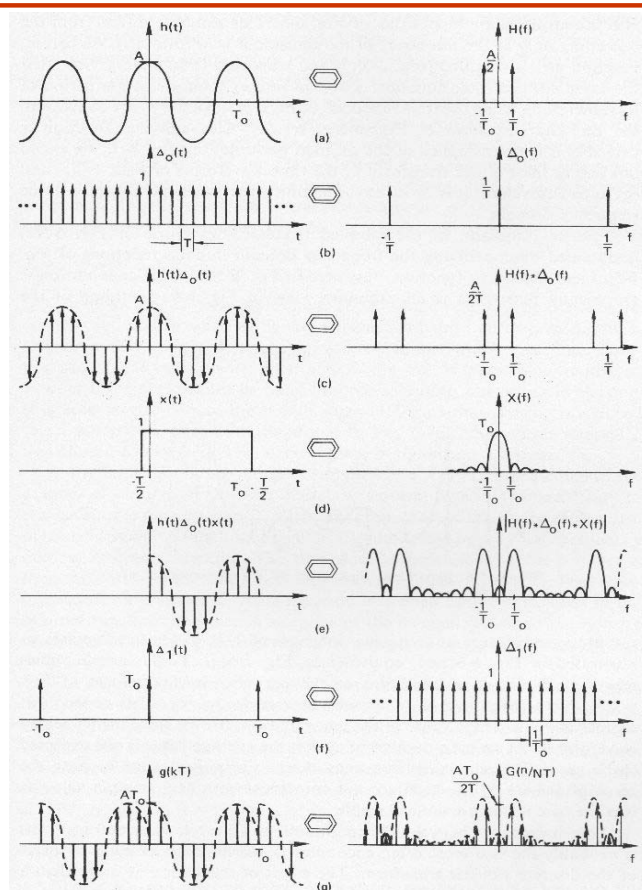


Figure 6-5. Discrete Fourier transform of a band-limited periodic waveform: truncation interval not equal to period.

38

www.estv.ipv.pt

DFT - Propriedades

Linearidade:

$$\begin{aligned}x_1[n] &\xleftrightarrow{DFT(N_3)} X_1[k] \\x_2[n] &\xleftrightarrow{DFT(N_3)} X_2[k] \\a.x_1[n] + b.x_2[n] &\xleftrightarrow{DFT(N_3)} a.X_1[k] + b.X_2[k] \\N_3 &\geq \max\{N_1, N_2\}\end{aligned}$$

Deslocamento Circular:

$$\begin{aligned}x[n] &\xleftrightarrow{DFT(N)} X[k] \\x[((n-m))_N] &\xleftrightarrow{DFT(N)} X[k].e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \\0 \leq n \leq N-1\end{aligned}$$

Dualidade:

$$\begin{aligned}x[n] &\xleftrightarrow{DFT(N)} X[k] \\X[n] &\xleftrightarrow{DFT(N)} N.x[((-k))_N] \\0 \leq k \leq N-1\end{aligned}$$

DFT - Convolução Circular

Nada mais é do que a convolução periódica considerando sinais de duração finita $x_1[n]$ e $x_2[n]$

Linear:

Sinais ilimitados

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m].x_2[n-m]$$

Periódica:

Sinais periódicos

$$\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] = \sum_{M=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m].\tilde{x}_2[n-m]$$

Circular:

Sinais limitados

$$x_1[n] \circledcirc x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N].x_2[((n-m))_N]$$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DFT(N)} X_1[k]$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{DFT(N)} X_2[k]$$

$$x_1[n] \circledcirc x_2[n] \xleftrightarrow{DFT(N)} X_1[k].X_2[k]$$

DFT - Convolução Linear

Existem algoritmos muito eficientes p/ cálculo da DFT algoritmos de FFT - *Fast Fourier Transform*

Pelo que, é eficiente implementar a convolução de 2 sinais através dos seguintes passos:

1. Calcular as DFTs de $x_1[n]$ e $x_2[n]$, $X_1[k]$ e $X_2[k]$
2. Calcular $X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k]$
3. Calcular IDFT de $X_3[k]$, $x_3[n]$, obtendo:

$$x_3[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$$

Porém muitas vezes desejamos: $x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Sendo: $x_1[n]$ de comprimento L
 $x_2[n]$ de comprimento P

O resultado da convolução circular de N amostras será igual à convolução linear se:

$$N \geq L + P - 1$$

Porém, se um dos sinais tiver comprimento indeterminado (processamento em tempo real).

Dois métodos implementam uma forma eficiente de cálculo da convolução linear através da DFT.

Overlap-add e Overlap-save

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



DFT - Resumo das Propriedades



Finite-Length Sequence (Length N)	N -point DFT (Length N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6. $W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2} \{X[((k))_N] + X^*[(((-k))_N)]\}$
12. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2} \{X[((k))_N] - X^*[(((-k))_N)]\}$
13. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[(((-n))_N)]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[(((-n))_N)]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$
Properties 15-17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[(((-k))_N)] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[(((-k))_N)]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X[(((-k))_N)]\} \\ X[k] = X[(((-k))_N)] \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X[(((-k))_N)]\} \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[(((-n))_N)]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[(((-n))_N)]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$