Instituto Superior Politécnico de Viseu
Escola Superior de Tecnologia de Viseu
Curso de Engenharia de Sistemas e Informática

Processamento Digital de Sinal

Aula 7,8

4.º Ano – 2.º Semestre

Manuel A. E. Baptista, Eng.º

Programa:

1. Introdução ao Processamento Digital de Sinal
2. Representação e Análise de Sinais
3. Estruturas e Projecto de Filtros FIR e IIR
4. Processamento de Imagem
5. Processadores Digitais de Sinal

Bibliografia:

Processamento Digital de Sinal:

•Sanjit K. Mitra, "**Digital Signal Processing** – A computer based approach", McGraw Hill, 1998
Cota: 621.391 MIT DIG
•Roman Kuc, "**Introduction to Digital Signal Processing**", McGraw Hill, 1988.
Cota: 621.391 KUC INT
•Johnny R. Johnson, "**Introduction to Digital Signal Processing**", Prentice-Hall, 1989.
Cota: 621.391 JOH INT
G. Proakis, G. Manolakis, "**Digital Signal Processing – Principles, Algorithms Applications**", 3ª Ed, P-Hall, 1996.
Cota: 621.391 PRO DIG
•James V. Candy, "**Signal Processing – The modern Approach**", McGraw-Hill, 1988
Cota: 621.391 CAN SIG
•Mark J. T., Russel M., "**Introduction to DSP – A computer Laboratory Textbook**", John Wiley & Sons, 1992.
Cota: 621.391 SMI INT
•James H. McClellan e outros, "**Computer-Based Exercises - Signal Proc. Using Matlab 5**", Prentice-Hall, 1998.
Cota: 621.391 MCC COM

Processamento Digital de Imagem:

•Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods, "**Digital Image Processing** ", Prentice Hall, 2ª Ed., 2002.
Cota: 681.5 GON DIG.
•I. Pittas H. McClellan e outros, "Digital Image Processing Algorithms and Applications", John Wiley & Sons, 2000.
Cota: 621.391 PIT.
•William K. Pratt, "**Digital image processing**", John Wiley, 2ª Ed, 1991.
Cota: 681.5 PRA DIG
•Bernd Jãhne, "**Digital image processing : concepts, algorithms, and scientific applications**", Springer, 1997.
Cota: 681.5 JAH

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Avaliação:

A avaliação é composta pela componente teórica e componente prática ponderadas da seguinte forma:

<u>Classificação Final</u> = 80% * Frequência ou exame + 20% * Prática

O acesso ao exame não está condicionado embora não tenha função de melhoria, ou seja, se o aluno entregar a prova de exame, será essa a classificação a utilizar no cálculo da média final independentemente da nota da prova de frequência obtida.

A avaliação prática é constituída por trabalhos laboratoriais a executar em MATLAB

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Representação e Análise de Sinais (tempo)

- **Transformada de z - Sumário**
  - Classificação dos Sinais
  - Amostragem de Sinais Contínuos
  - Transformada de z: definição
  - Transformada de z : propriedades
  - Transformada de z inversa
  - Aplicação aos Sistemas
  - Notas sobre estabilidade

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL

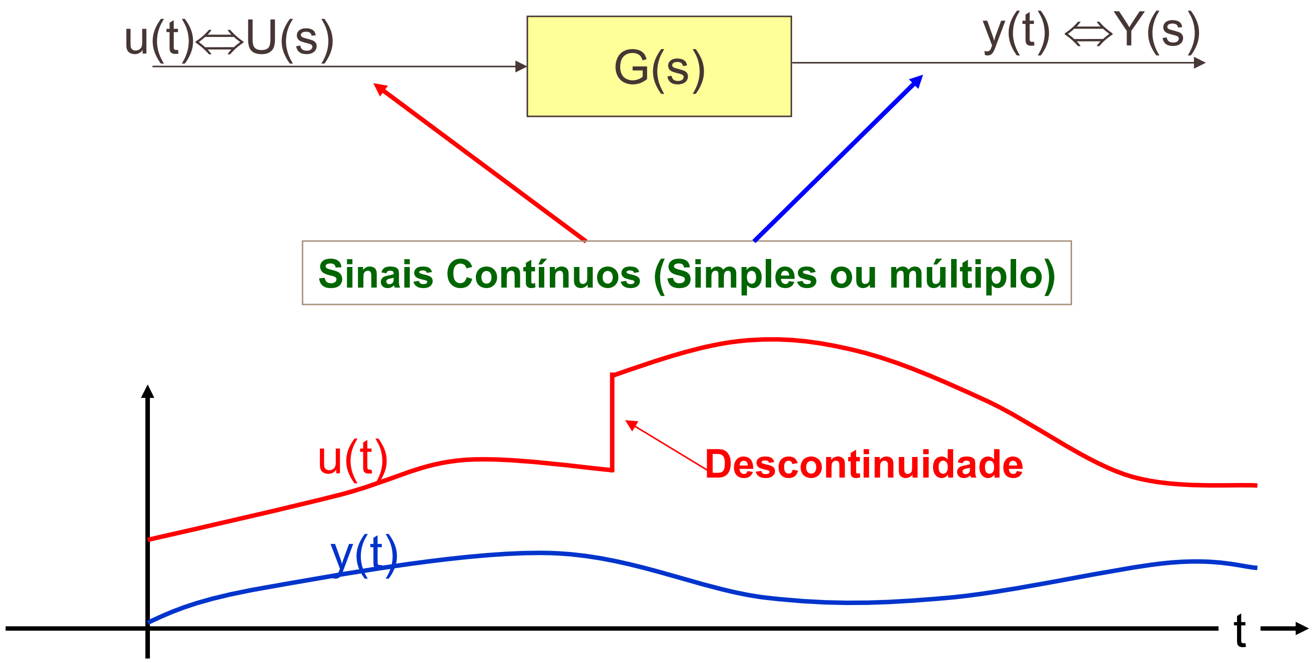
Transformada de z – Classificação dos Sinais

- Sinais Contínuos (ou analógicos)
- Sinais Amostrados
- Sinais Discretos

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Classificação dos Sinais

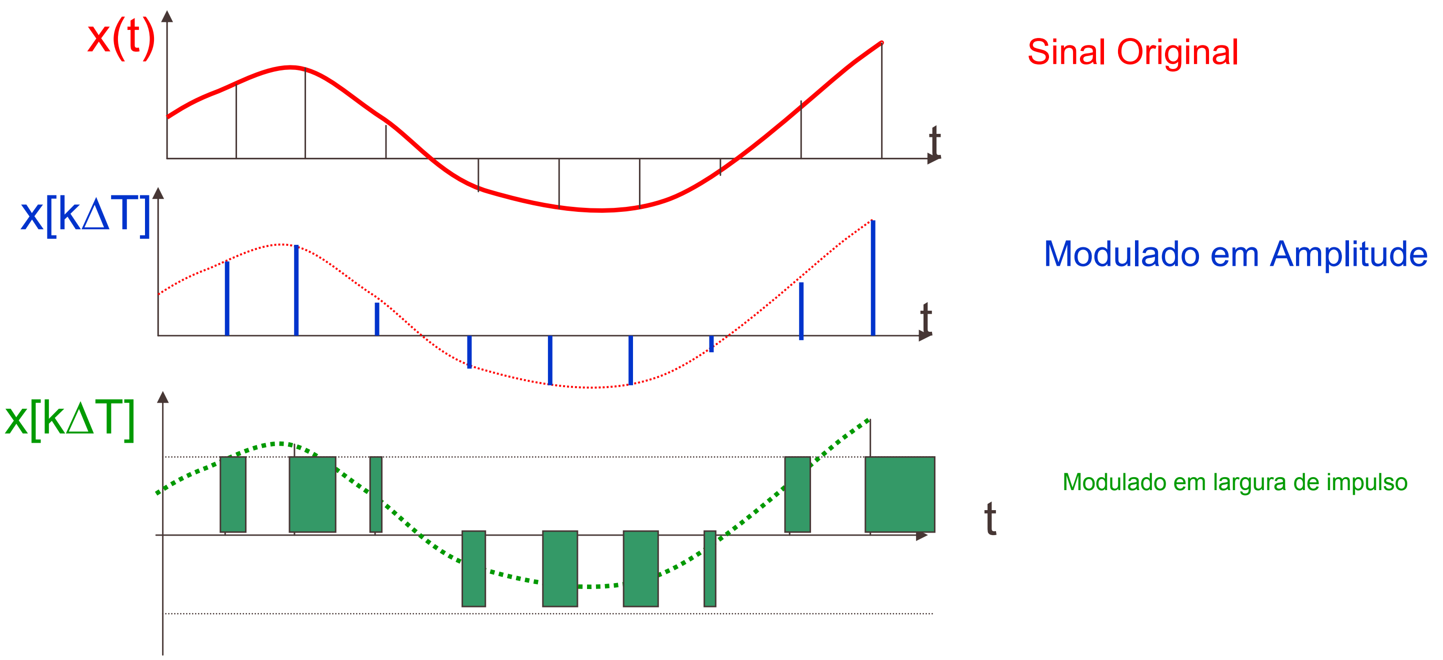
Sinais Contínuos (ou analógicos)



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z– Classificação dos Sinais

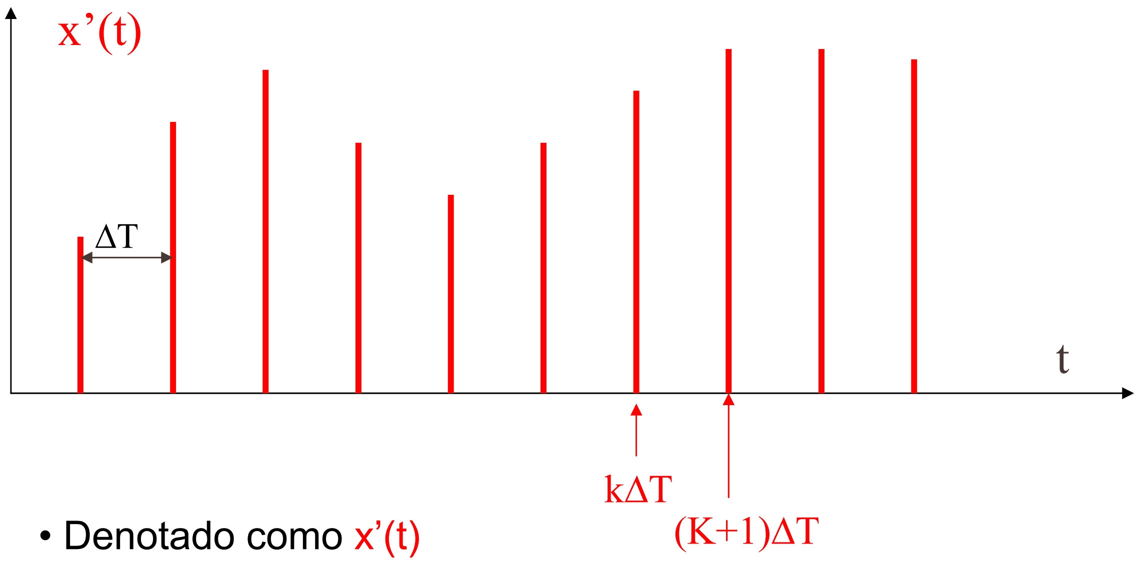
Sinal Amostrado: Técnicas de Modulação



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z– Classificação dos Sinais

Sinal Amostrado

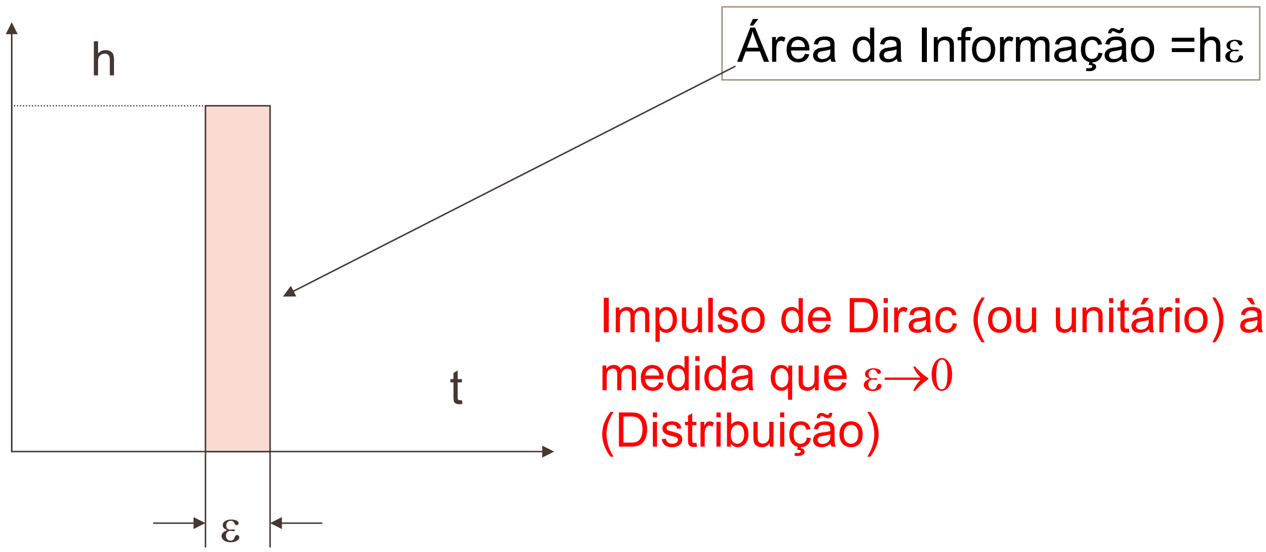


- Denotado como x'(t)
- As amostras existem apenas nos instantes de amostragem
- A altura relativa, representa o valor (informação)
- O período de amostragem ΔT é constante
- Capaz de fazer funcionar um sistema físico

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Classificação dos Sinais

Amostra Física



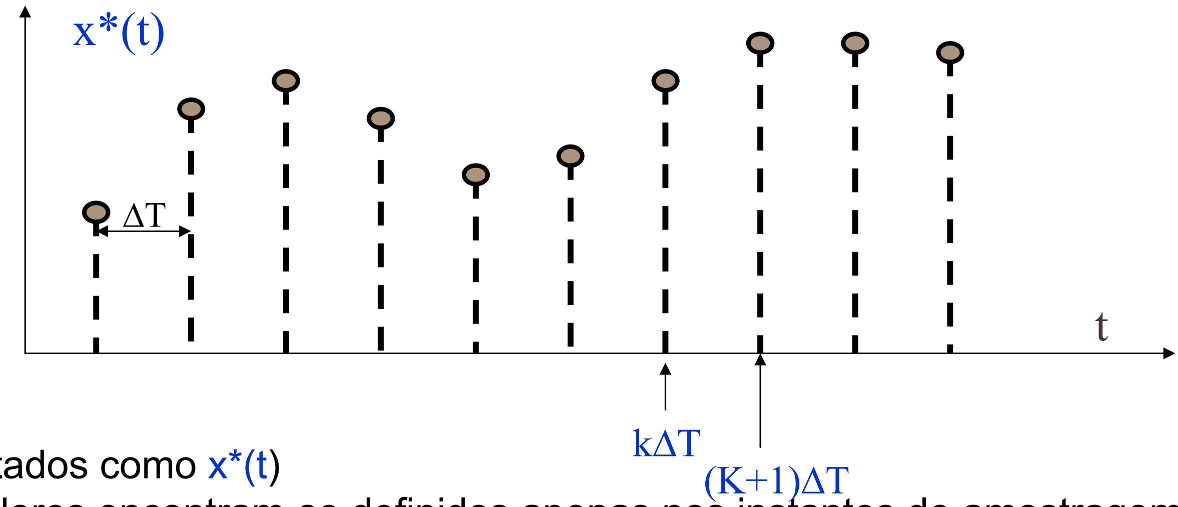
Impulso de Dirac (ou unitário) à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ (Distribuição)

Nota: A energia do impulso unitário é finita (capaz fazer funcionar um sistema físico

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Classificação dos Sinais

Sinais Discretos (em amplitude ou no tempo)



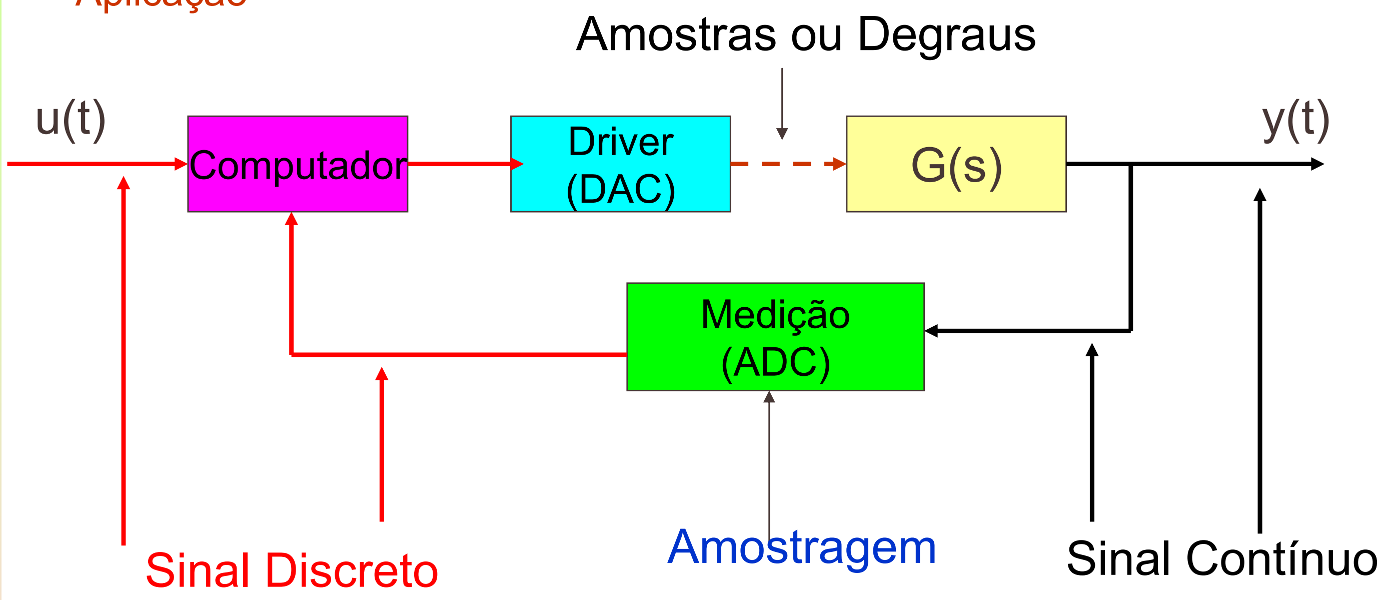
- Denotados como x*(t)
- Os valores encontram-se definidos apenas nos instantes de amostragem
- A altura relativa, representa o valor numérico
- O período de amostragem ΔT é constante
- Utilizado para operações aritméticas
- Incapaz de por em funcionamento um sistema físico

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

2003-2004
SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL

Transformada de z – Classificação dos Sinais

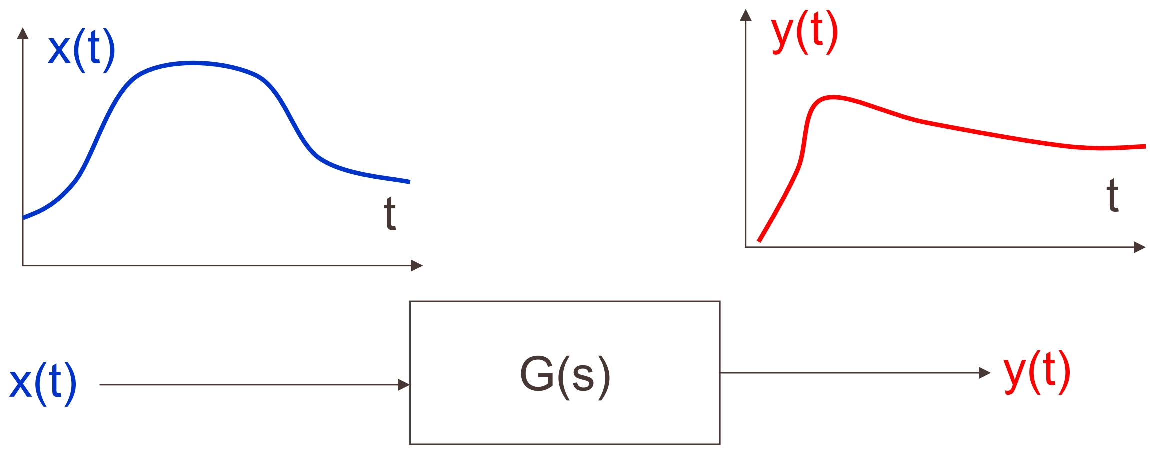
Aplicação



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Classificação dos Sinais

Sistema Contínuo

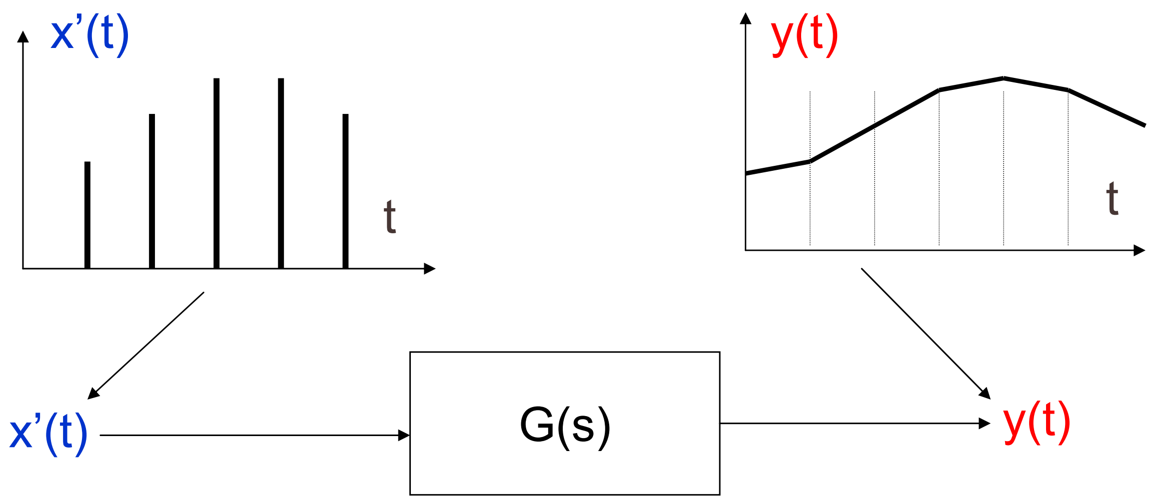


Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

2003-2004
SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL

Transformada de z – Classificação dos Sinais

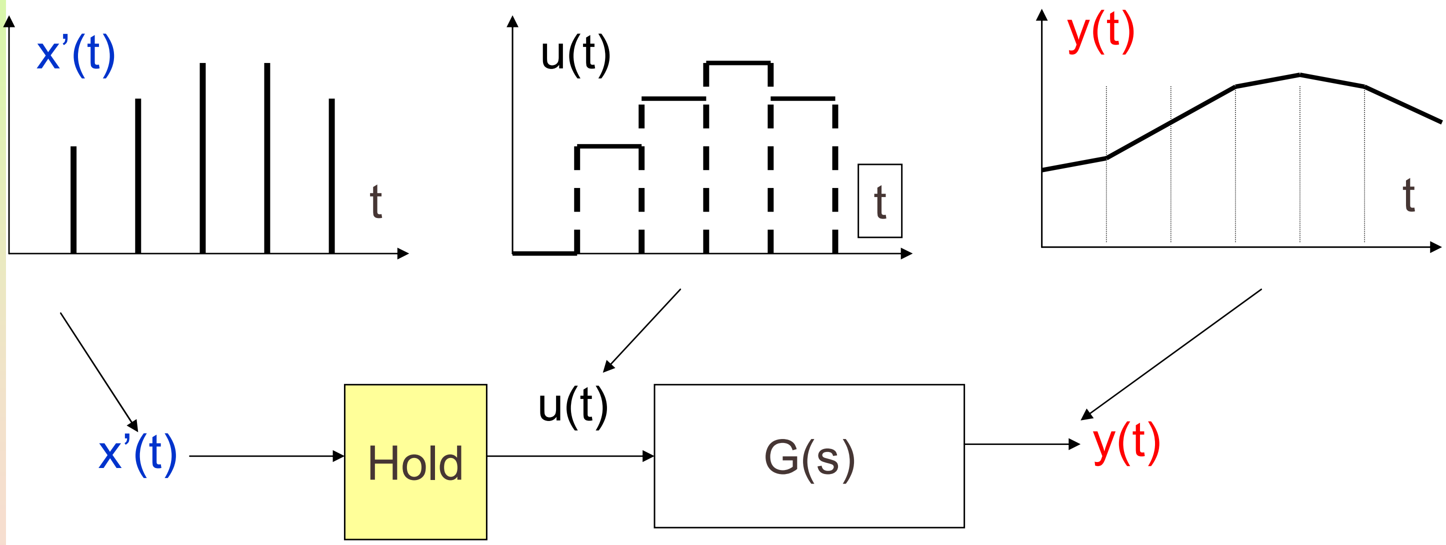
Sistema Amostrado



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Classificação dos Sinais

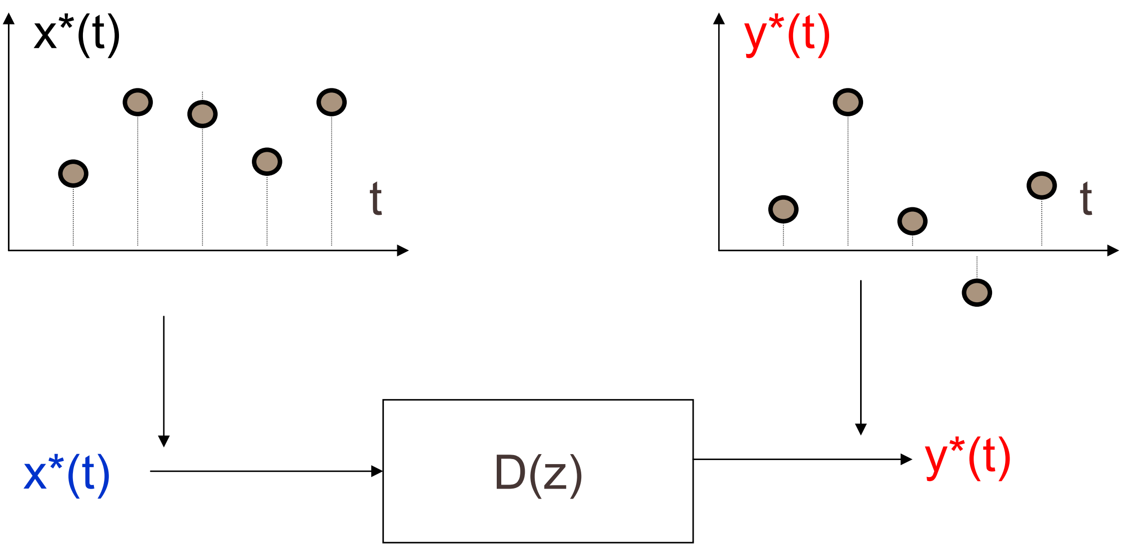
Sistema amostrado com circuit *hold*



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Classificação dos Sinais

Sistema Discreto

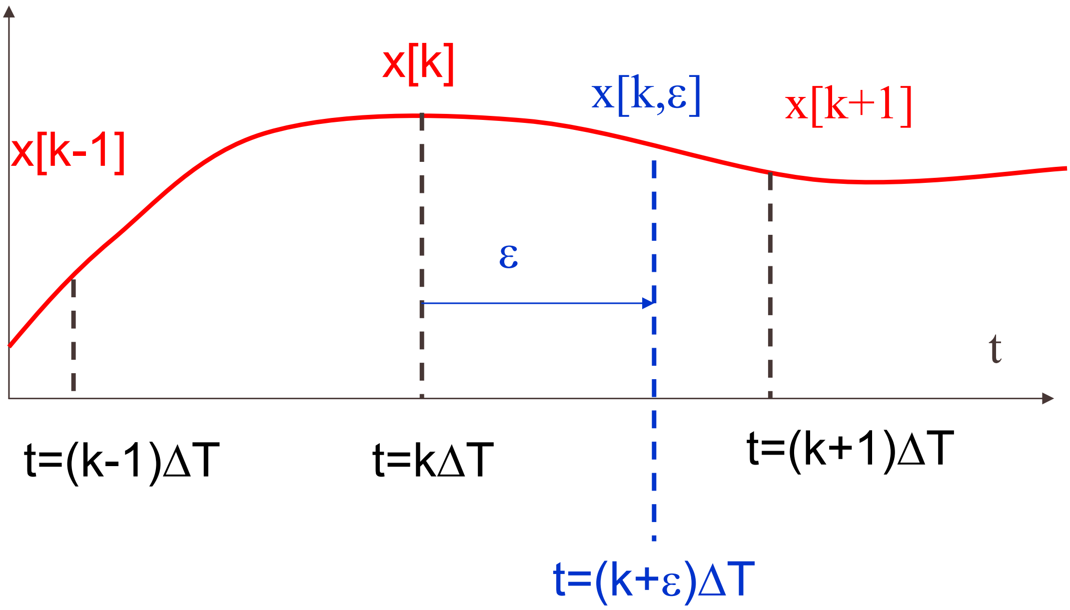


D(z) é definida pelas equações diferença ou pela função de transferência

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Instante de Amostragem e Atraso

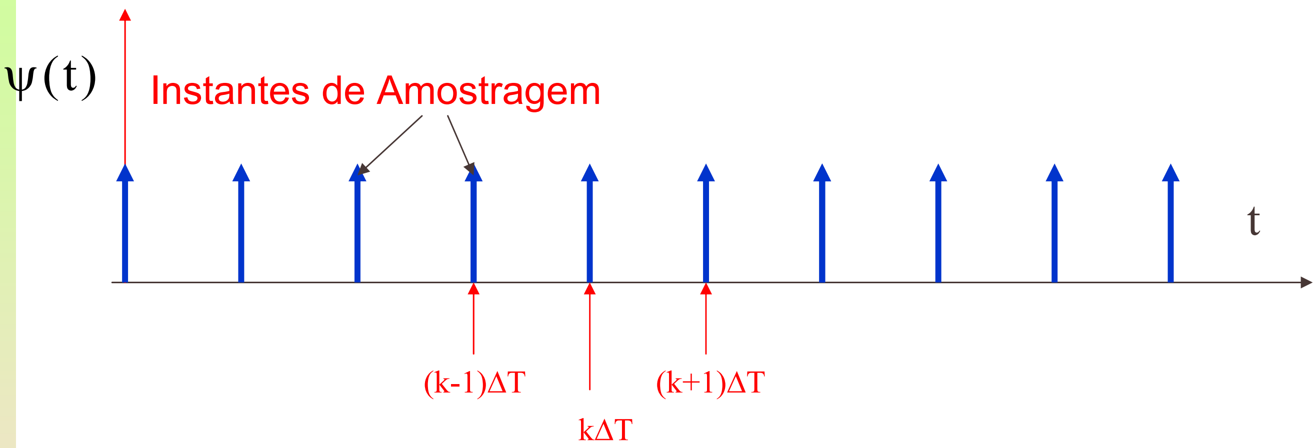


Várias notações $x(k\Delta T)=x[k,\varepsilon]=x[k]=x_k$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Função de Amostragem



$$\boxed{\psi(t) = \Delta T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - n\Delta T)}$$

Função Periódica

n = inteiro………-2,-1,0,1,2,3,4,………..

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

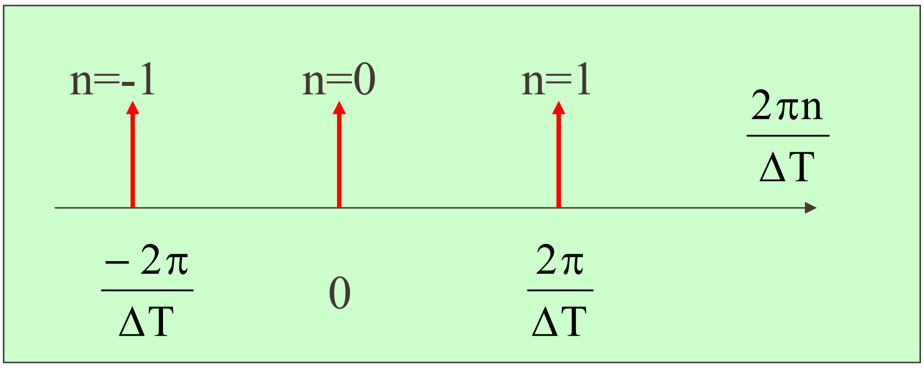
Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Decomposição em Série de Fourier

$$\Psi(\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{2j\pi n\frac{t}{\Delta T}}$$

$$c_n = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} f(t) e^{-2j\pi n\frac{t}{\Delta T}} dt = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \Delta T\,\delta(t) e^{-2j\pi n\frac{t}{\Delta T}} dt = 1$$

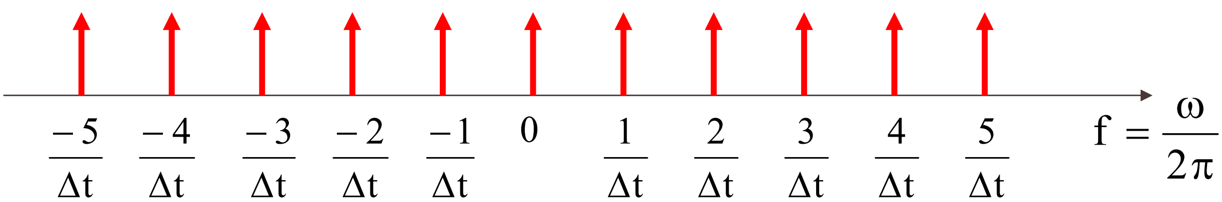
$$c_n = 1, \forall n$$



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

$$\boxed{\Psi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T}\right)}$$

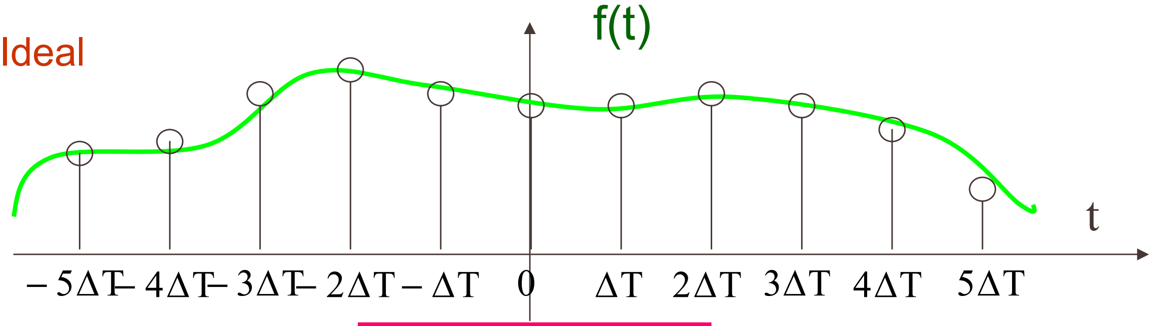


$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - n\Delta T) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

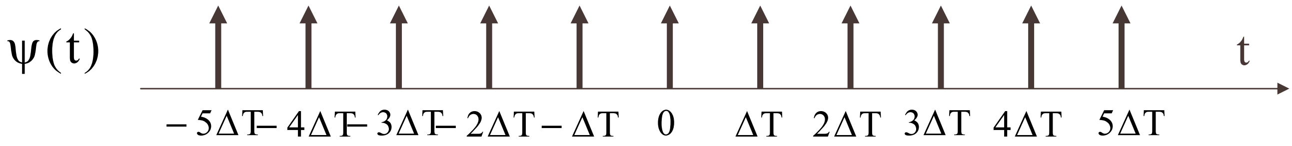
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Amostrador Ideal



$$\boxed{f^{'}(t) = f(t)\psi(t)}$$

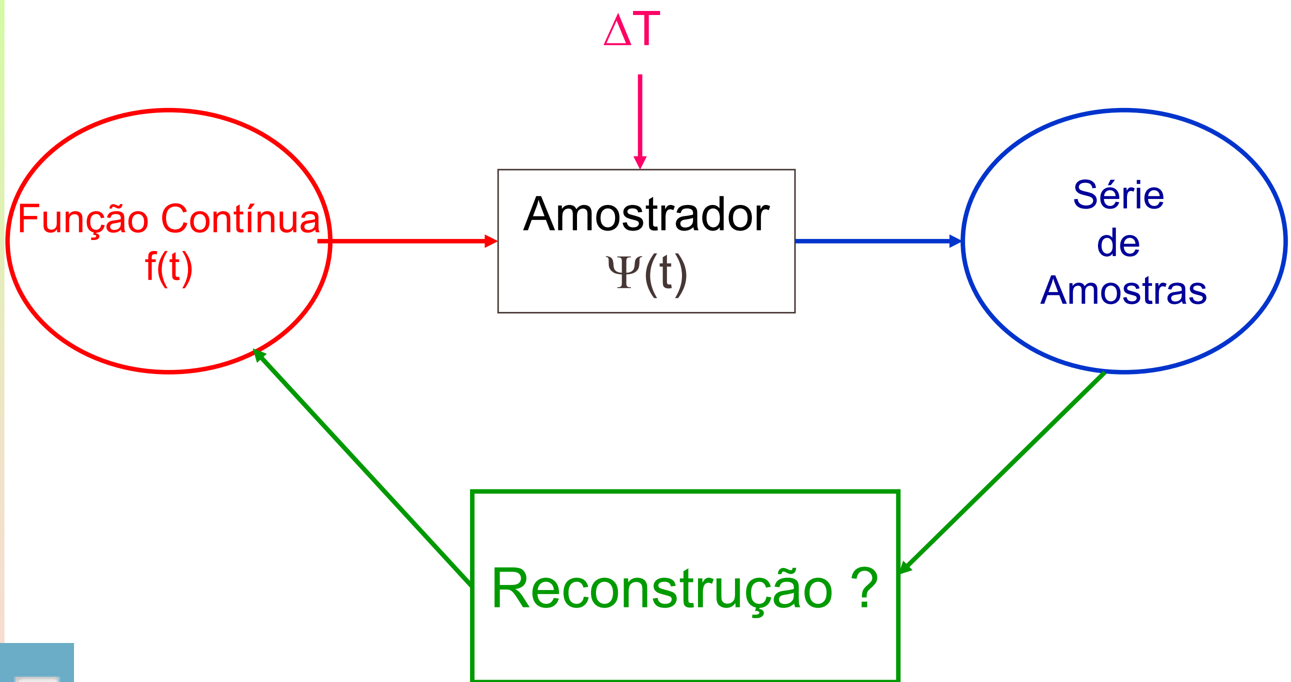


$$\boxed{f^{'}(t) = \Delta T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)}$$

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Processo de Amostragem



SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Análise no domínio da Frequência

$$\boxed{f^{'}(t) = f(t)\psi(t)}$$

$$\boxed{\psi(t) = \Delta T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - n\Delta T)}$$

- F (ω)= Transformada de Fourier de f(t)
- Ψ (ω)= Transformada de Fourier de ψ(t)
- F' (ω)= Transformada de Fourier de f'(t)

$$\boxed{F^{'}(\omega) = F(\omega) \otimes \psi(\omega)}$$

Convolução no domínio da frequência

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Análise de F'(ω)

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\Psi(\omega - \nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T} - \nu)d\nu$$

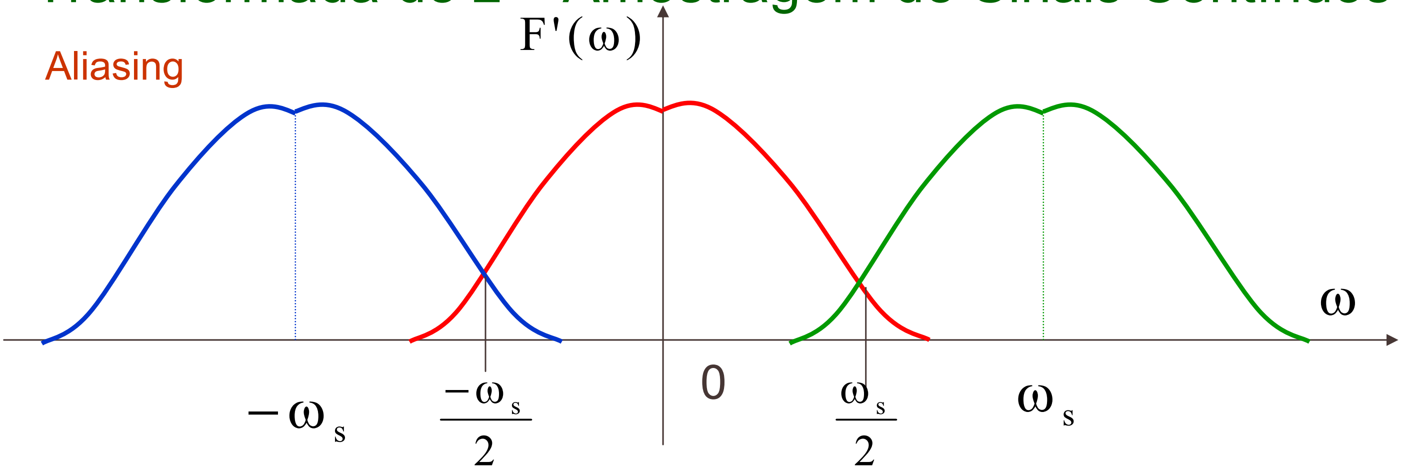
$$F'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\delta(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T} - \nu)d\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T})$$

$$\boxed{F'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T})}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Aliasing



Componentes Primárias
Componentes Fundamentais

Componentes Complementares

Componentes Complementares

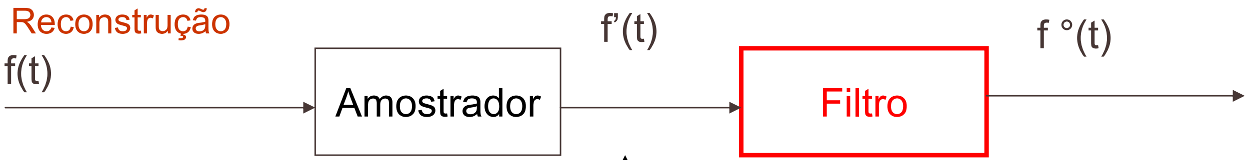
O espectro de frequência sobrepõem-se (*Folding*)

$$\frac{\omega_s}{2} = \text{\textit{Frequência de Folding}}$$

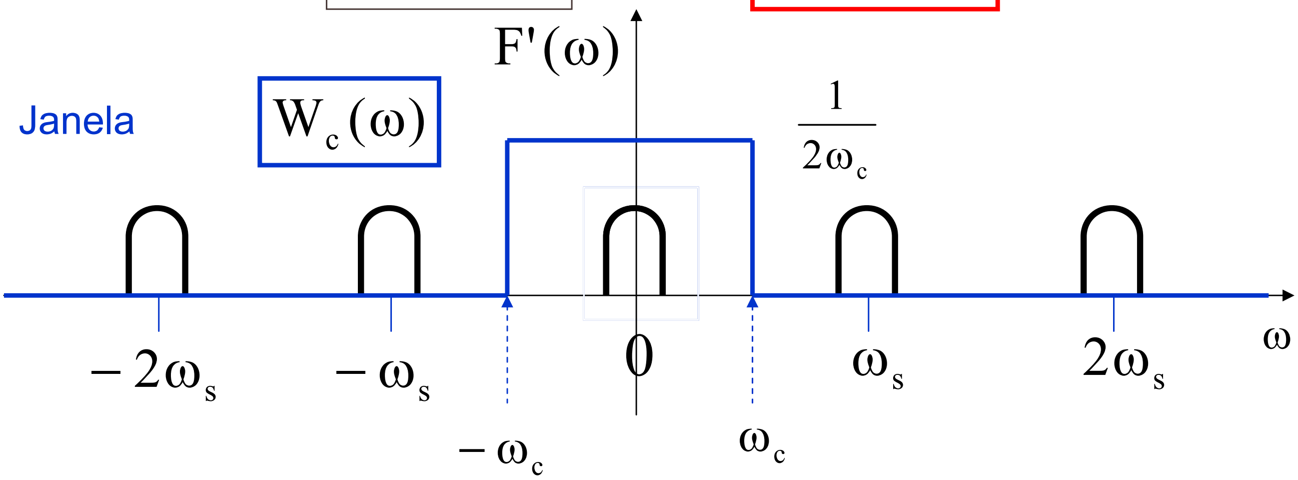
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Reconstrução



Janela



No domínio da frequência

$$F°(\omega) = F'(\omega)W_c(\omega)$$

No domínio do tempo

$$f°(t) = \int f'(\tau)w_c(t-\tau)d\tau$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

esi
Engenharia de Sistemas e Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Reconstrução

$$\boxed{w_c(t) = \frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{2j\omega t}\,d\omega = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t}}$$

$$f^\circ(t) = \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\delta(\tau - n\Delta T)\frac{\sin\omega_c(t-\tau)}{\omega_c(t-\tau)}\,d\tau$$

$$\tau = n\Delta T$$

$$f^\circ(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\frac{\sin\omega_c(t-n\Delta T)}{\omega_c(t-n\Delta T)}$$

$$f^\circ(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\frac{\sin 2\pi f_c(t-n\Delta T)}{2\pi f_c(t-n\Delta T)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

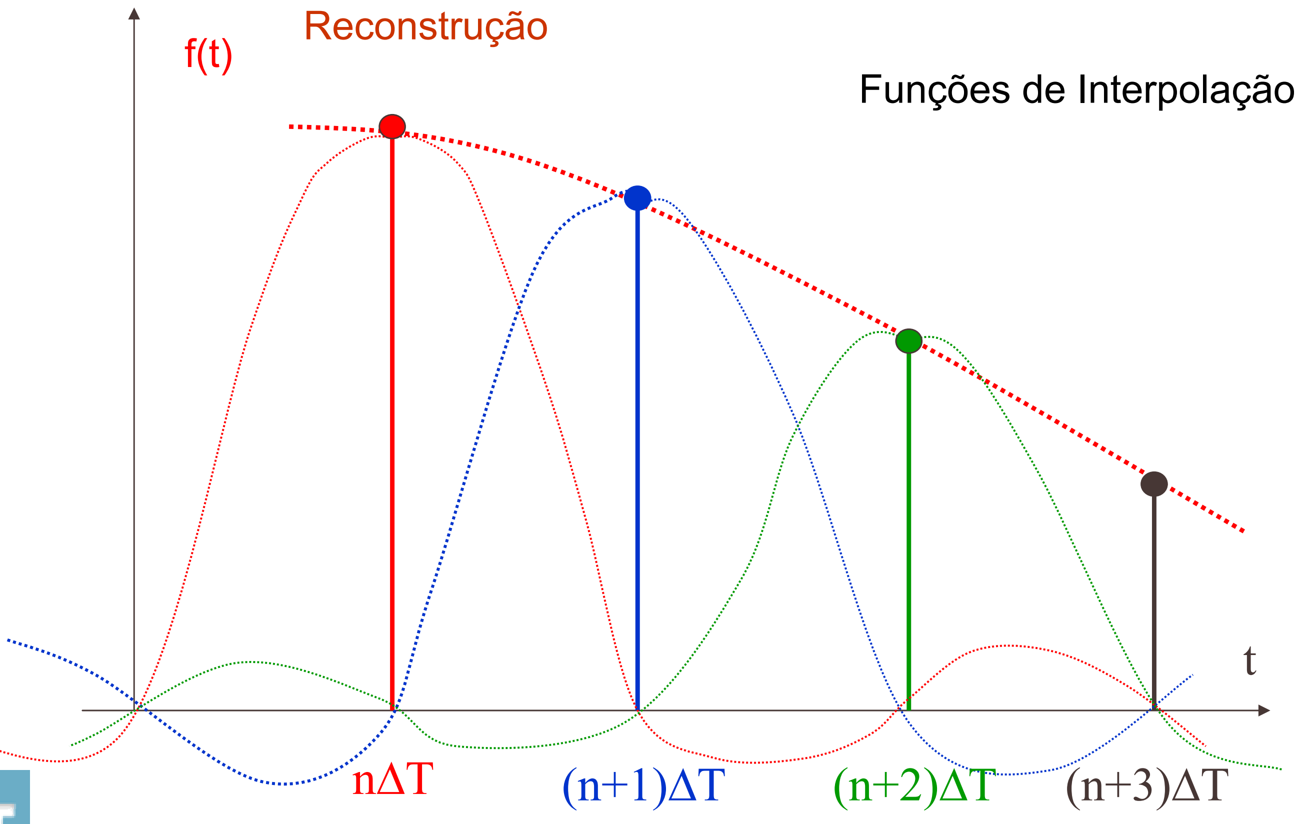
SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL

2003-2004

esi
Engenharia de Sistemas e Informática

Transformada de z – Amostragem de Sinais Contínuos

Reconstrução



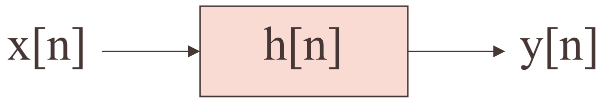
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Departamento de Informática
www.estv.ipv.pt

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Seja um sistema discreto LTI:



Com: $x[n] = z^n \quad , \quad z \in Complexos$

A saída y[n] pode ser calculada como:

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n-k}$$

$$y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

$$y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}$$

Definindo: $$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].z^{-k}$$

Temos que: $$y[n] = H(z) \cdot z^n$$

Cte complexa

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Logo, definimos Transformada Z do sinal discreto x[n] como:

$$\boxed{X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

Transformada Z Unilateral:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

Equivalente à TZ bilateral quando x[n]=0 n<0 ;

Transformada de z – Definição

Escrevendo o número complexo *z* na sua forma polar:

$$z = r.e^{j\Omega}$$

Temos: $$X\left(r.e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].r^{-n}.e^{-j\Omega n}$$

Logo: $$X\left(r.e^{j\Omega}\right) = F\left\{x[n].r^{-n}\right\}$$

Se r =1: $$X\left(e^{j\Omega}\right) = F\left\{x[n]\right\}$$

Transformada de Fourier

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Logo: Transformada Z pode ser obtida a partir da Transformada de Fourier fazendo: $z = e^{j\Omega}$

$$X(z) = F\left\{x[n]\right\}\Big|_{e^{j\Omega}=z}$$

O inverso nem sempre é verdade!!!

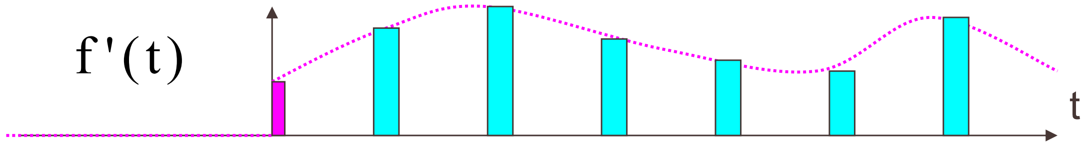
Pois:

$$Z\left\{x[n]\right\} = F\left\{x[n].r^{-n}\right\}$$

Pode fazer com que alguns sinais se tornem convergentes

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição



$$f'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t-k\Delta T) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta T)$$

Para sinais amostrados ou discretos

Aplique-se a transformada de Laplace de f'(t)

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t-k\Delta T)e^{-st}dt = \frac{-f(0)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta T)e^{-sk\Delta T} = \frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f(k\Delta T)e^{-sk\Delta T} =$$

- Estão envolvidos factores como Exp(-sΔT).
- Ao contrário da maioria das funções de transferência dos sistemas contínuos, não conduz a funções racionais

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$F^{'}(s) = -\frac{1}{2}f(0) + F'(k)$$

$$\boxed{z = e^{s\Delta T}}$$

$$s = \frac{1}{\Delta T}\ln(z) = \sigma + j\omega$$

$$\mathrm{Re}(z) = e^{\sigma\Delta T}\cos(\omega\Delta T)$$

$$\mathrm{Im}(z) = e^{\sigma\Delta T}\sin(\omega\Delta T)$$

Laplace	z
$\int$	$\sum$
t	k

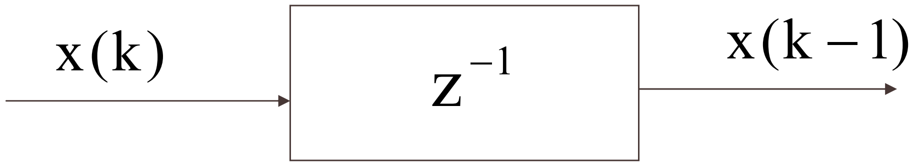
$$F(z) = F'(s)[s = \frac{1}{\Delta T}\ln(z)]$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Representação dum atraso



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

A operação, de cálculo da transformada de z duma função contínua f(t), envolve os seguintes três passos:

1- f(t) é amostrado através dum amostrador ideal, para obter f'(t)

2- Determina-se a transformada Laplace de f'(t) $F'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta T) e^{-ks\Delta T}$

3- Troca-se $e^{s\Delta T}$ por z em F'(s) para obter $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta T) z^{-k}$

Algumas transformadas de z

f(t)	F(s)	F(z)
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-k\Delta T)$	$e^{-k\Delta Ts}$	z^{-k}
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{\Delta Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{\Delta T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-a\Delta T}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{\Delta Tze^{-a\Delta T}}{(z-e^{-a\Delta T})^2}$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Contínuo: Transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

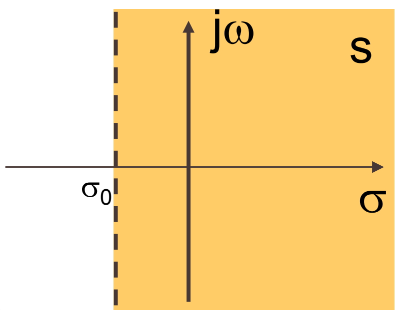
Fazendo: $s = j\omega$

Obtemos a Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j\omega t}dt$$

Se eixo $j\omega \in$ ROC

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t).e^{-\sigma t}\right)e^{-j\omega t}dt$$



Eixo jω

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Discreto: Transformada Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} \qquad z = r.e^{j\Omega}$$

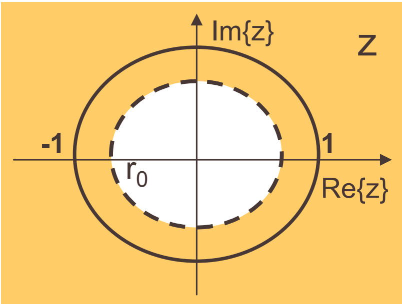
Fazendo: $z = e^{j\Omega}$

Obtemos a Transformada de Fourier:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\Omega n}$$

Se circulo unitário ∈ ROC

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right).e^{-j\Omega n}$$



Circulo Unitário

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Exemplo: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n].z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a.z^{-1}\right)^n$$

PG: $\alpha = a.z^{-1}$ $a_0 = 1$ $n = \infty$

$$S_n = a_0 \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$X(z) = 1 \cdot \frac{1-(a.z^{-1})^{\infty}}{1-a.z^{-1}}$$

Converge se: $\left|a.z^{-1}\right| < 1$ $\qquad |z| > |a|$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

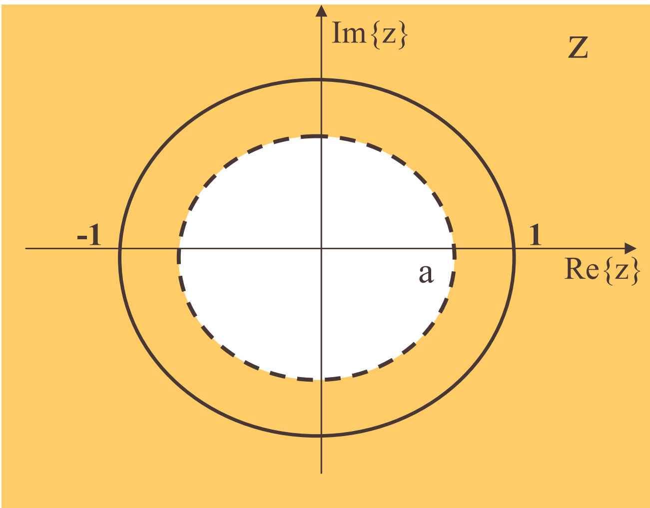
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Neste caso:

$$X(z) = \frac{1-0}{1-a.z^{-1}}$$



$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| > |a|$$

Se |a|<1 ∃ T.Fourier
|a|>1 ∄ T.Fourier

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Exemplo 2: $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1].z^{-n}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(a.z^{-1}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(a.z^{-1}\right)^{-n}$$

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{-1}.z\right)^n$$

PG: $\alpha = a^{-1}.z$ $\quad a_0 = a^{-1}.z$ $\quad n=\infty$

$$S_n = a_0 \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$X(z) = -a^{-1}z \cdot \frac{1-(a^{-1}.z)^{\infty}}{1-a^{-1}.z}$$

Converge se: $\left|a^{-1}.z\right| < 1 \qquad |z| < |a|$

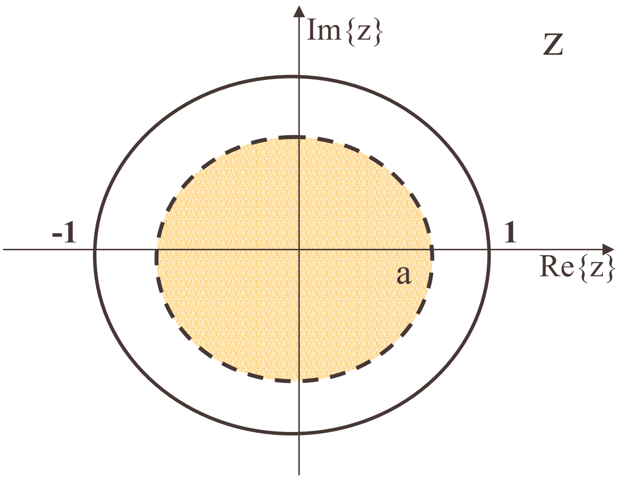
Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Neste caso:

$$X(z) = -a^{-1} z \frac{1-0}{1-a^{-1}.z}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| < |a|$$



Se |a|>1 ∃ T.Fourier
|a|<1 ∄ T.Fourier

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL
2003-2004

Transformada de z – Definição

Analogia Contínuo ↔ Discreto

Comentários

- Sinais diferentes podem ter a mesma expressão algébrica de X(z).
- Logo uma Transformada z só é completamente definida se especificarmos:
  - Expressão algébrica de X(z)
  - Região de Convergência (ROC)

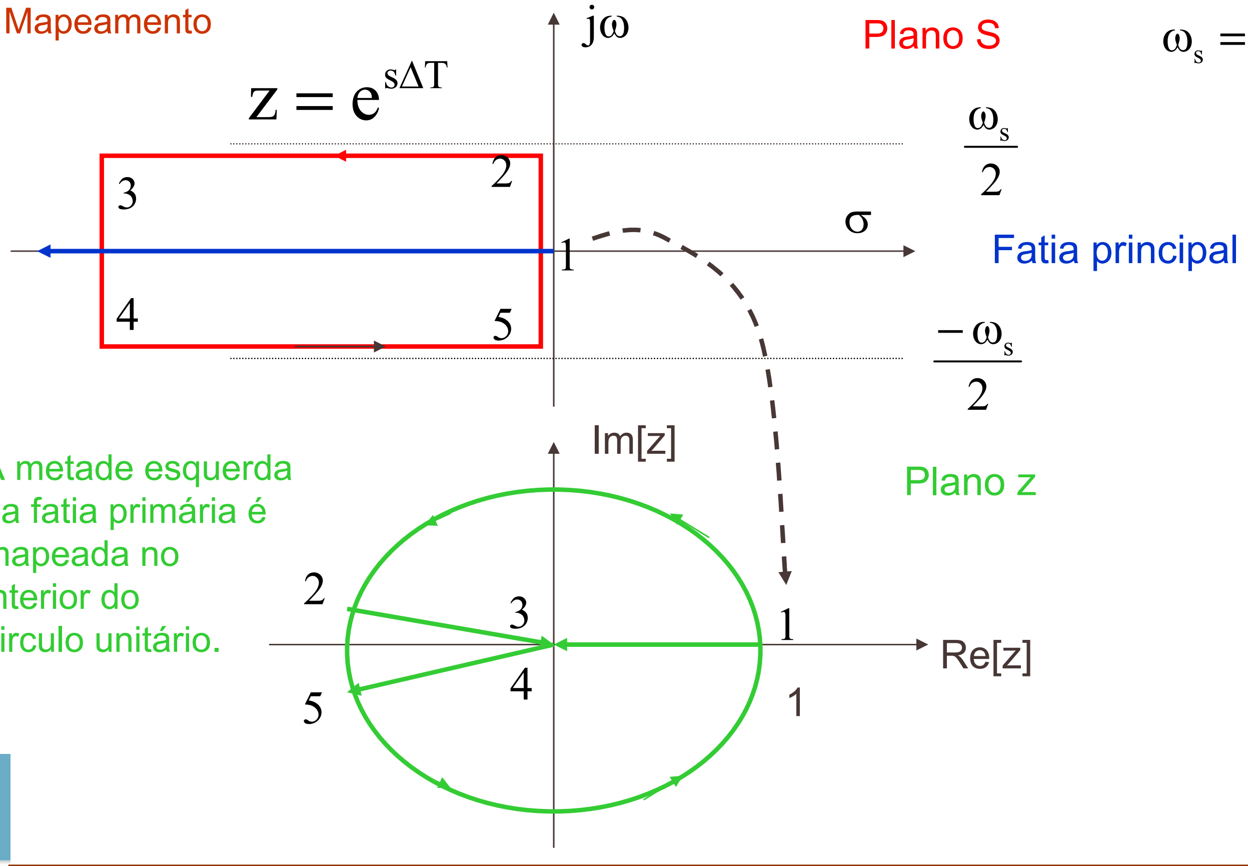
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Mapeamento

$$z = e^{s\Delta T}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta T}$$



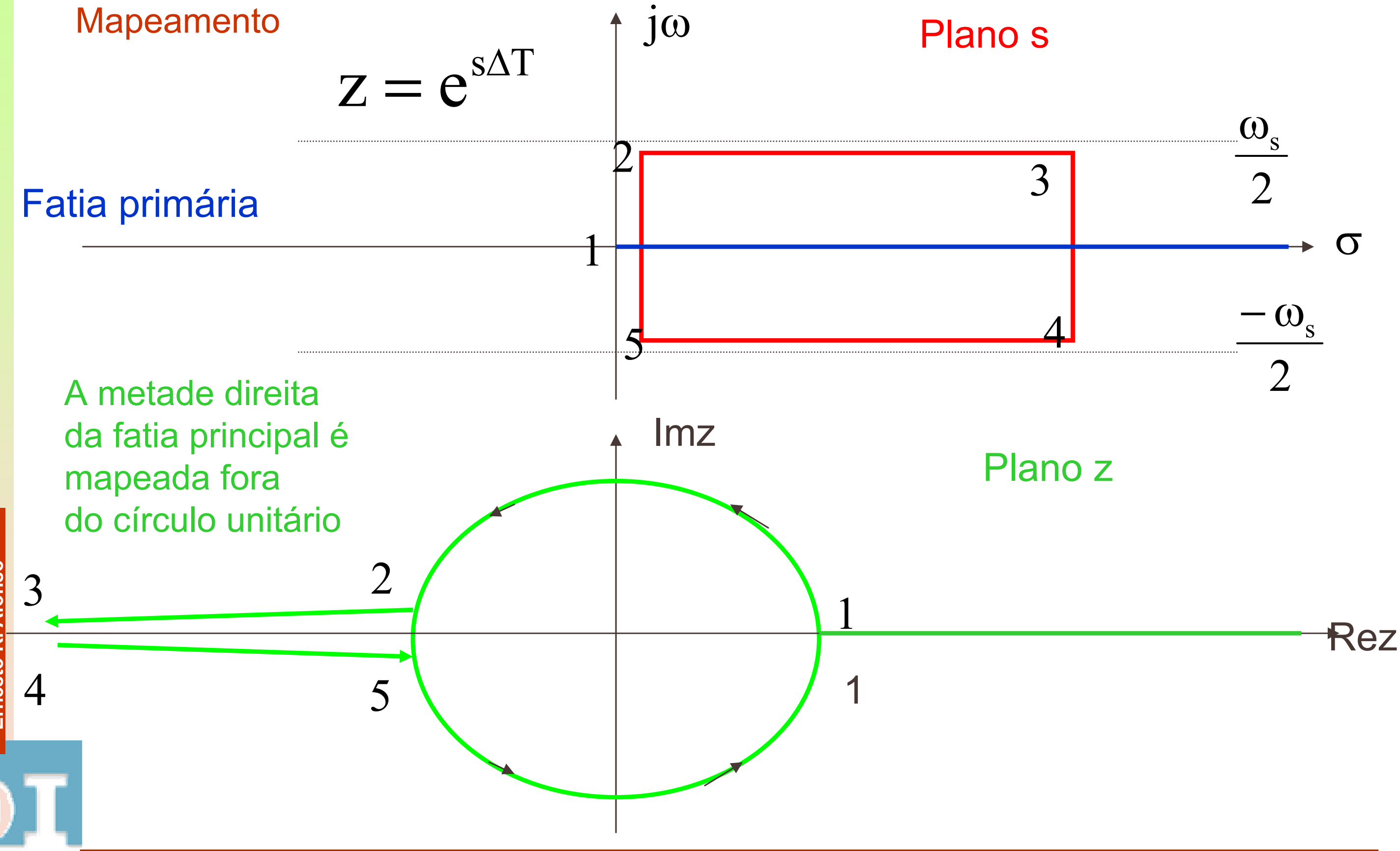
A metade esquerda da fatia primária é mapeada no interior do circulo unitário.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Mapeamento

$$z = e^{s\Delta T}$$

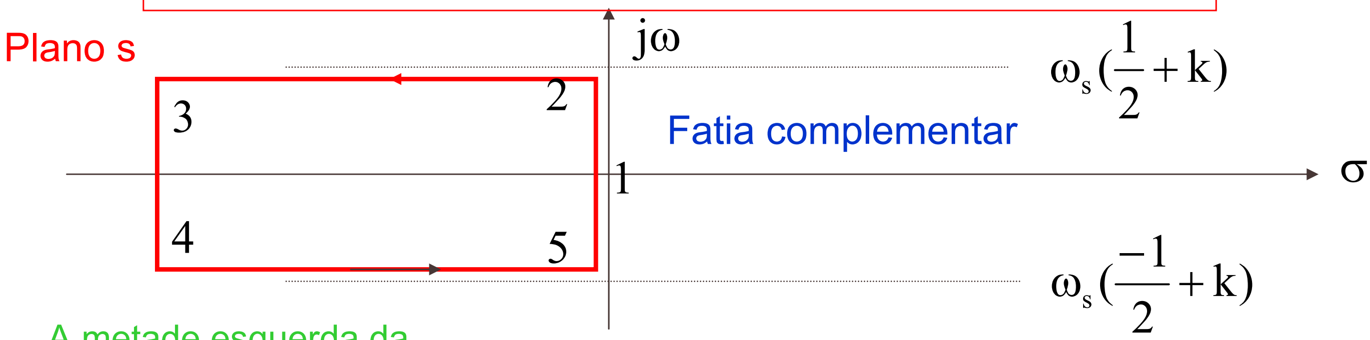


A metade direita da fatia principal é mapeada fora do círculo unitário

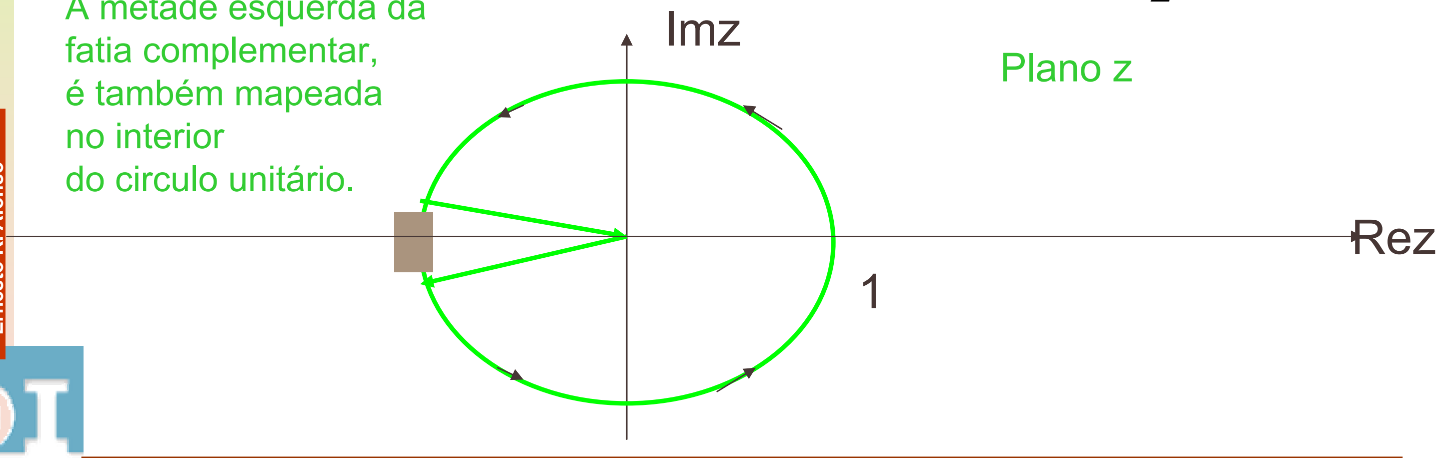
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

$$e^{(s+jk\omega_s)\Delta T} = e^{s\Delta T}e^{jk\omega_s\Delta T} = e^{s\Delta T}e^{2j\pi k} = e^{s\Delta T}$$



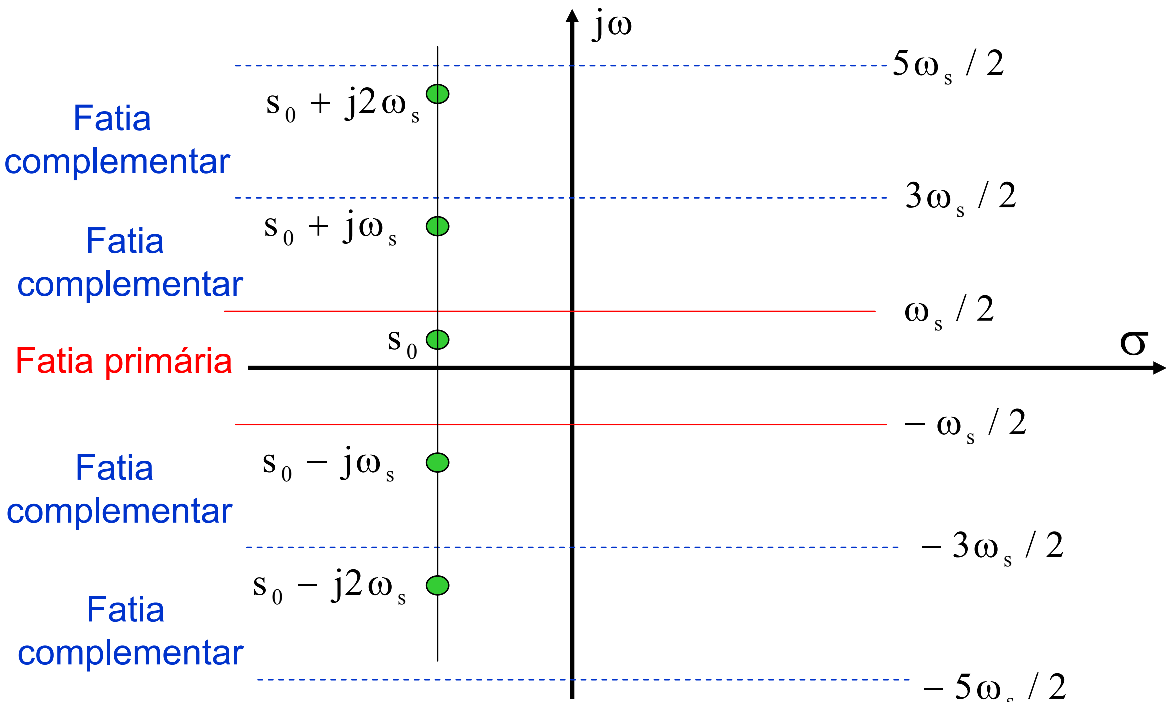
A metade esquerda da fatia complementar, é também mapeada no interior do circulo unitário.



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

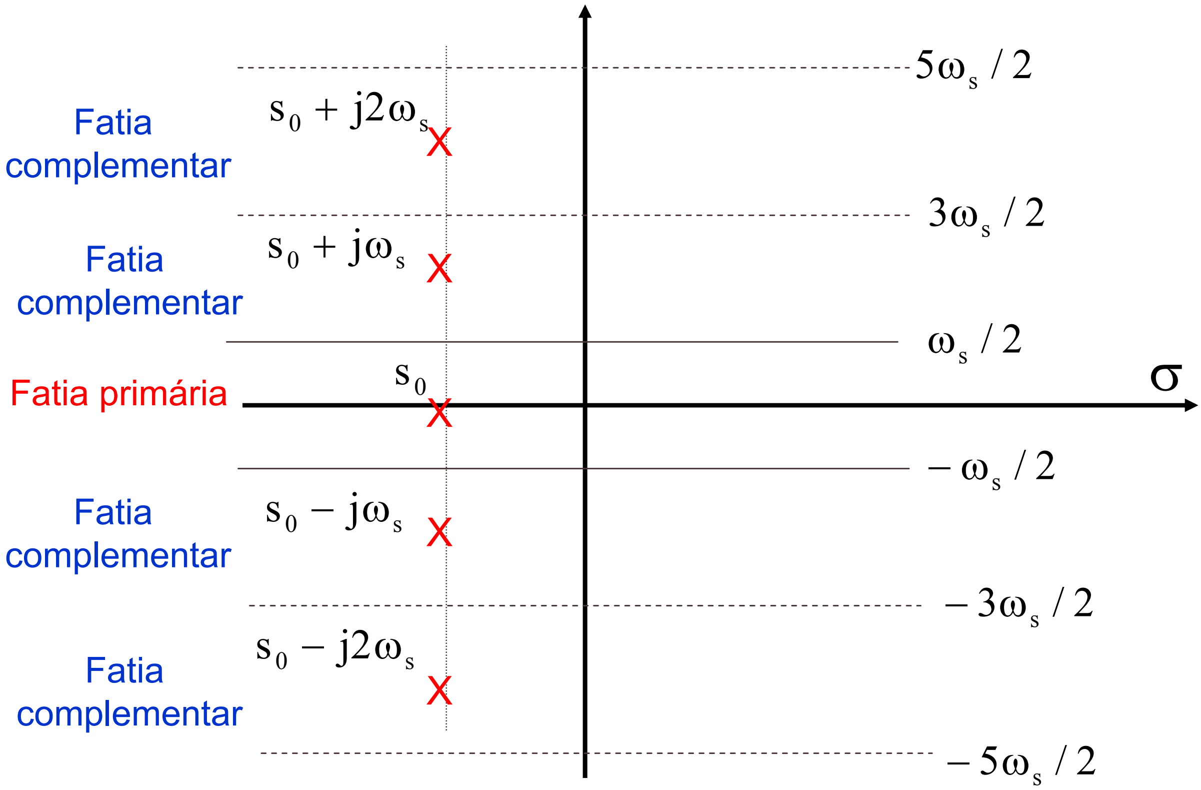
Propriedades de F'(s) no plano s



$$F'(s + jm\omega_s) = F'(s)$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

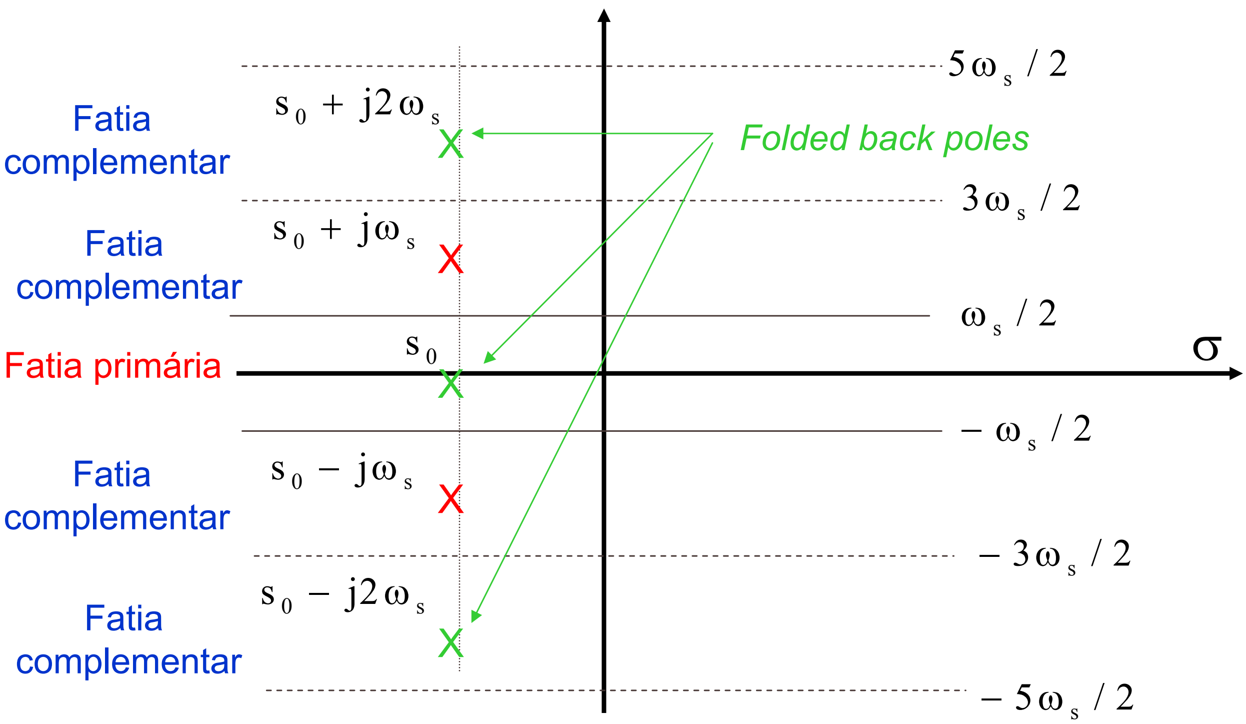
Transformada de z – Definição



X Pólos de F'(s) na fatia principal

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

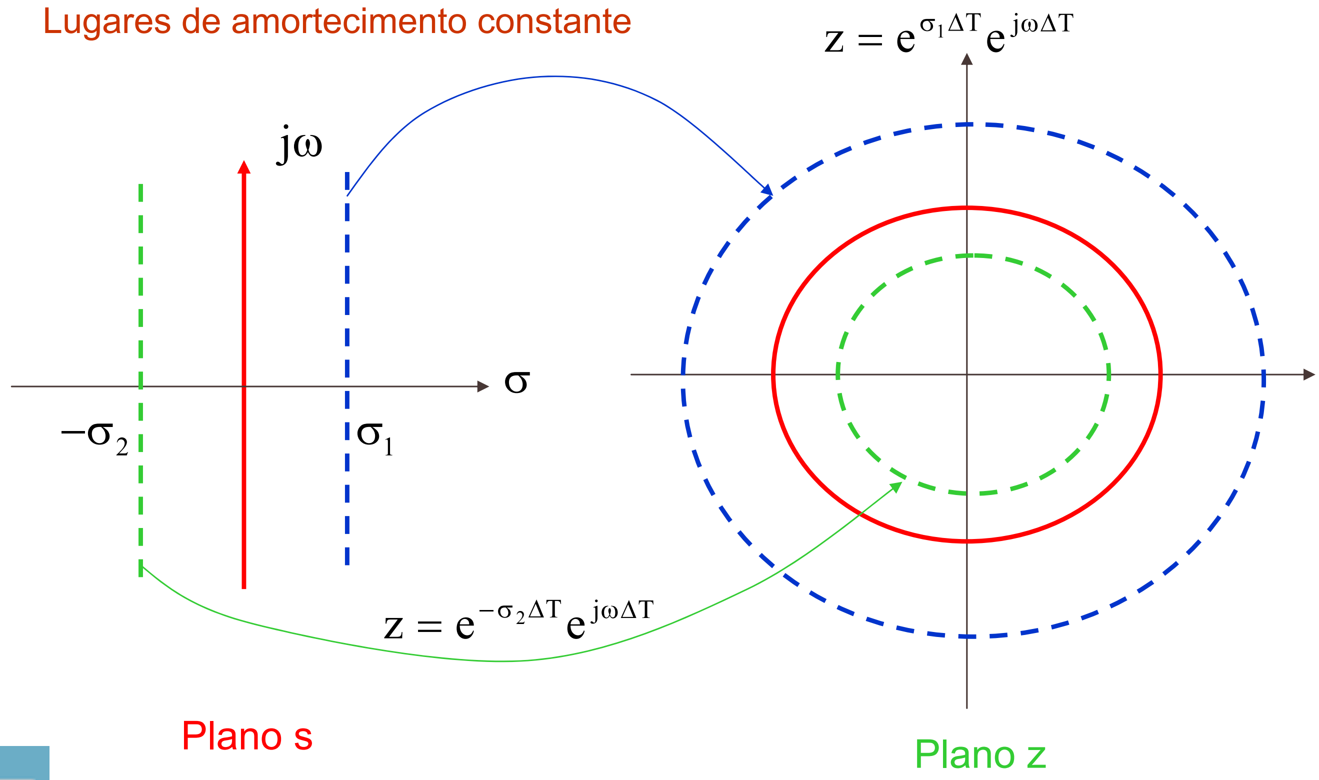


Pólos X de F'(s) nas fatias complementares

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

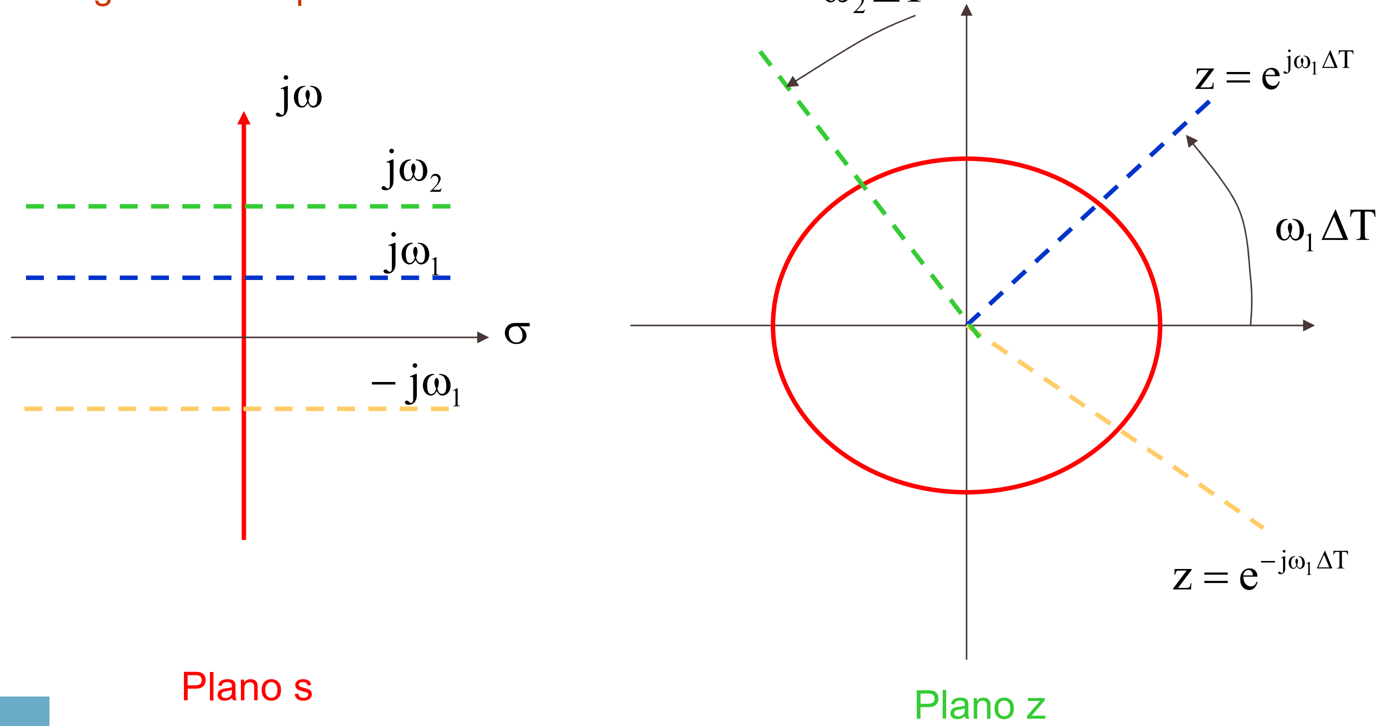
Lugares de amortecimento constante



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Lugares de frequência constante



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Mapeamento entre o plano s e o plano z

Conclusão:

Todos os pontos da metade esquerda do plano s, são mapeados na região interior do circulo unitário, no plano z.

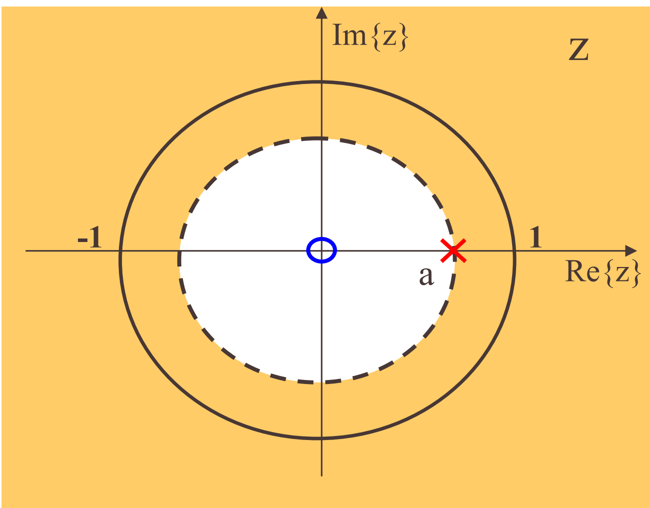
Os pontos da metade direita do plano s são mapeados na região exterior do circulo unitário, no plano z.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

Representação gráfica no plano *z* dos pólos e zeros.



$$X(z) = \frac{z}{z-a}\ ,\ \ |z| > |a|$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

Exemplo 3:

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\}z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
DI
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$|z|>\frac{1}{2}\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

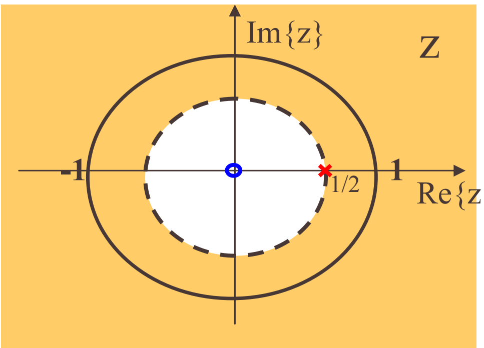
$$X(z)=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}=\frac{2z^2-\frac{1}{6}z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
DI
Departamento de Informática

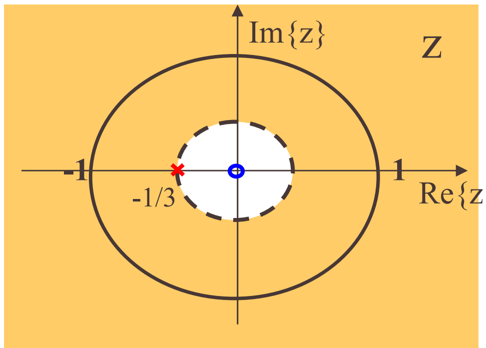
Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

$$\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

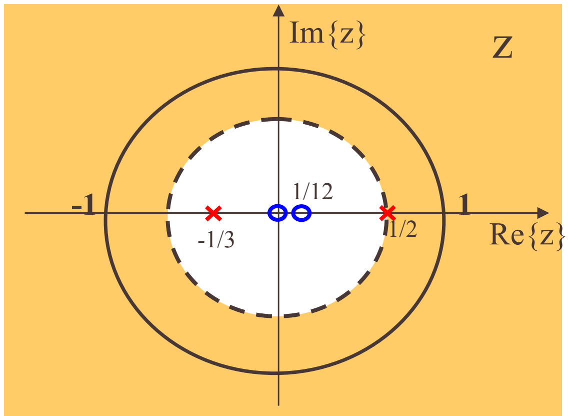


$$\frac{z}{z+\frac{1}{3}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$



$$X(z) = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

$$|z| > \frac{1}{2}$$



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

Exemplo 4:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

Usando os resultados das análises anteriores e a Propriedade de Linearidade da Transformada Z.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z+\frac{1}{3}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

Logo: $X(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{3}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad ROC: \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

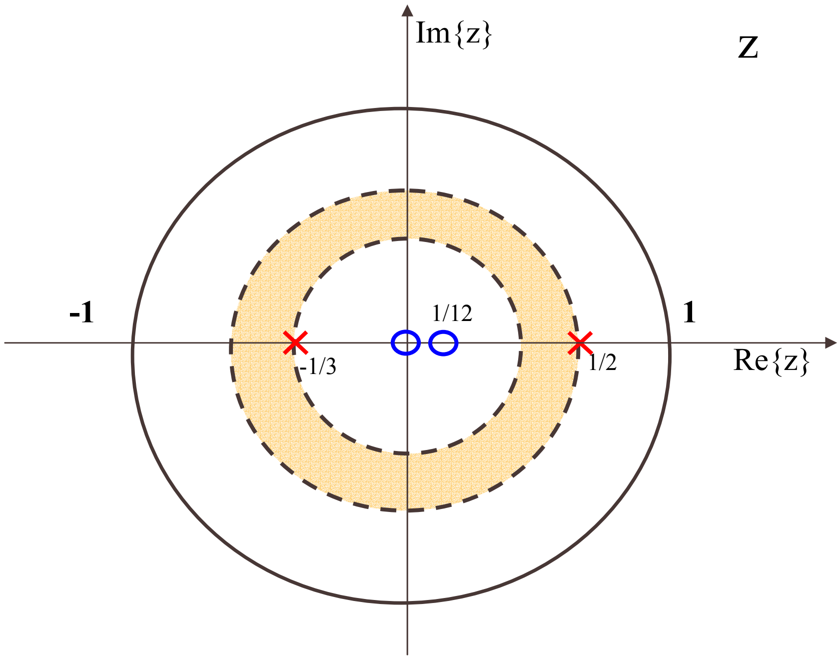
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

$$X(z)=\frac{z}{z+\frac{1}{3}}+\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$ROC:\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

Exemplo 5:

$$x[n]=a^n\left(u[n]-u[n-N]\right)=\begin{cases}a^n, & 0\le n\le N-1\\ 0, & outros\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n].z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}a^n.z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(a.z^{-1}\right)^n$$

PG: $a_0=1$ $\alpha=a.z^{-1}$ $n = N$

$$S_n=a_0\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$X(z)=1\cdot\frac{1-\left(a.z^{-1}\right)^N}{1-a.z^{-1}}$$

X(z) converge se $\left(a.z^{-1}\right)^N<\infty$

Isto é: $|a|<\infty \quad e \quad z\neq 0$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

$$X(z) = 1 \cdot \frac{1-\left(a.z^{-1}\right)^N}{1-a.z^{-1}} = \frac{1-a^N.z^{-N}}{1-a.z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{\dfrac{z^N - a^N}{z^N}}{\dfrac{z-a}{z}} = \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - a^N}{z-a}$$

Pólos da X(z):

$$z^{N-1} = 0 \;\rightarrow\; N-1 \;\; pólos \;\; em \;\; z=0$$
$$z-a=0 \rightarrow \;\; pólo \;\; em \;\; z=a$$

Zeros da X(z):

$$z^N - a^N = 0 \;\rightarrow Zeros \;\; raízes \, do \;\; polinômio$$
$$zeros \;\; em \quad z = a.e^{j(2\pi k/N)} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Quando k=0: zero em z = a logo cancela com o pólo em z = a

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

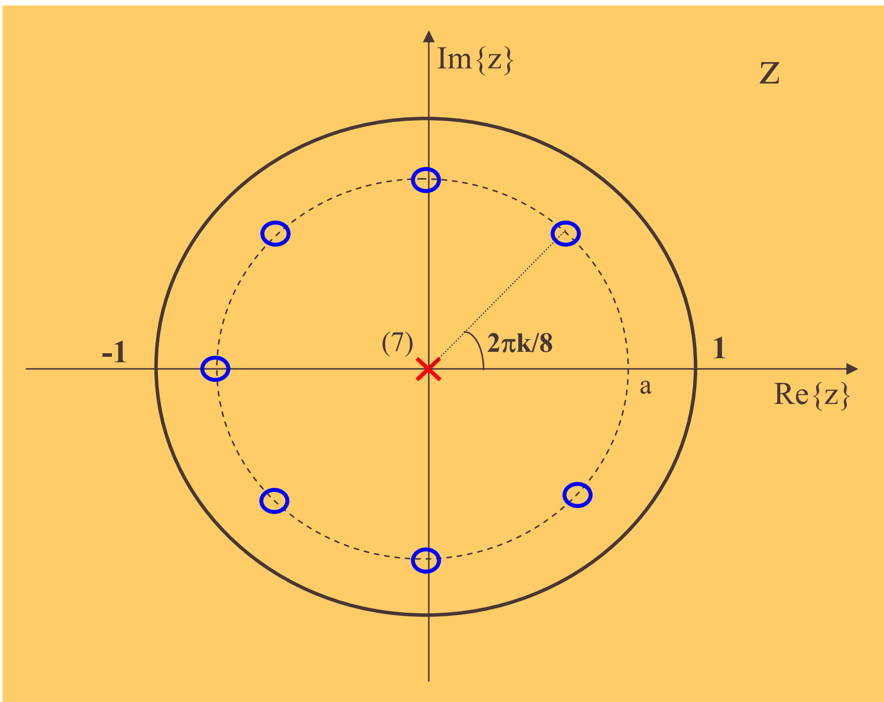
Transformada de z – Definição

Diagrama de pólos e zeros

Logo tem-se:

- N-1 pólos em *z=0*
- N-1 zeros distribuídos uniformemente sobre um círculo de raio *a*

p/ N=8



ROC: Todo plano *z* com excepção de *z=0*

Transformada de z – Definição

Propriedades da ROC

Considerando X(z) uma função racional em *z* e x[n] finito p/n finito

1) A ROC de X(z) é um anel ou disco centrado na origem (z=0)

2) A Transformada de Fourier de x[n] converge absolutamente se e só se a ROC de X(z) inclui a circunferência unitária.

3) A ROC não contém pólos de X(z)

4) Se x[n] tem duração finita, x[n]≠0 p/ $-\infty<N_1\leq n\leq N_2<\infty$, a ROC é todo plano *z* com possíveis excepções em *z*=0 e *z*=∞

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Convolução

$$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(z) \qquad f_2(t) \Leftrightarrow F_2(z) \qquad Z[\sum_{n=0}^{k} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T)]$$

$$Z[\sum_{n=0}^{k} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T)] = \sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{n=0}^{k} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T) z^{-k}]$$

$$Z[\sum_{n=0}^{k} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T)] = \sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{n=0}^{\infty} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T) z^{-k}]$$

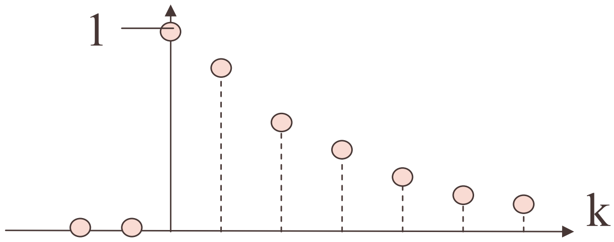
$$m = k - n$$

$$Z[\sum_{n=0}^{k} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n\Delta T) z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m\Delta T) z^{-m}$$

$$\boxed{Z[f_1(t) \otimes f_1(t)] = Z[\sum_{n=0}^{k} f_1(n\Delta T) f_2(k\Delta T - n\Delta T)] = F_1(z) F_2(z)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades



$$f^*(k) = e^{-\alpha k} \qquad \alpha > 0$$

$$f^*(k) = 0, k < 0$$

Aplicação da transformada de z

$$F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^*(k) z^{-k}$$

$$F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha} z^{-1})^k$$

$$\boxed{F^*(k) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha}}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Cosseno Discreto

$$f^*(k) = \cos(\beta k) = \frac{e^{j\beta k} + e^{-j\beta k}}{2}$$

$$F^*(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{j\beta}} + \frac{z}{z - e^{-j\beta}}\right)$$

$$\boxed{Z[e^{-\alpha k}] = \frac{z}{z - e^{-\alpha}}}$$

$$F^*(z) = \frac{z}{2}\left[\frac{(z - e^{-j\beta}) + (z - e^{j\beta})}{(z - e^{j\beta})(z - e^{-j\beta})}\right]$$

$$F^*(z) = \frac{z}{2}\left[\frac{2z - (e^{j\beta} + e^{-j\beta})}{z^2 - z(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) + 1}\right] = \frac{z}{2}\left[\frac{2z - 2z\mathrm{Cos}(\beta)}{z^2 - 2z\mathrm{Cos}(\beta) + 1}\right]$$

$$\boxed{F^*(z) = \frac{z(z - \cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Outra aproximação

$$y(k) = \cos(k\beta) + j\sin(k\beta) = e^{jk\beta}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-j\beta}} = \frac{z}{z - \cos\beta - j\sin\beta}$$

$$Y(z) = \frac{z(z - \cos\beta + j\sin\beta)}{(z - \cos\beta - j\sin\beta)(z - \cos\beta + j\sin\beta)}$$

$$Y(z) = \frac{z(z - \cos\beta) + jz\sin\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}$$

$$\boxed{Z[\cos] = \frac{z(z - \cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}}$$

$$\boxed{Z[\sin] = \frac{z\sin(\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Função DIRAC

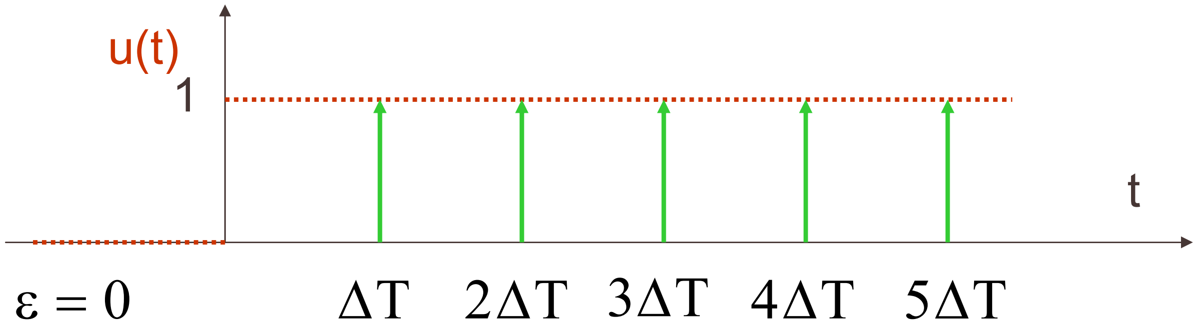
$$F[\delta(t)] = 1$$

$$\boxed{F[\delta(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t) z^{-s\Delta T} = \delta(0) = 1}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Função Degrau Amostrado



$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk\Delta T} = \frac{1}{1 - e^{-s\Delta T}}$$

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk\Delta T}$$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

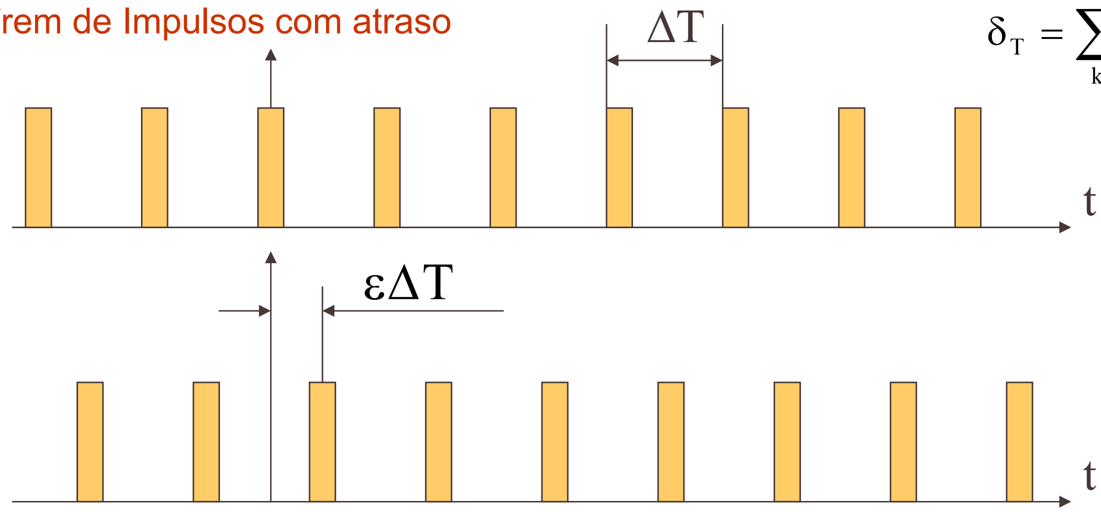
Nota: Equivalente a Exp(-αk) com $\alpha \rightarrow 0$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Trem de Impulsos com atraso

$$\delta_T = \sum_{k} \delta(t - k\Delta T)$$



$$x_e^{'} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e(t)\delta[t - (k+\varepsilon)\Delta T]$$

$$X_e^{'}(s,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_e[(k+\varepsilon)\Delta T)e^{-s(k+\varepsilon)\Delta T} = e^{-s\varepsilon\Delta T} \sum_{k=0}^{\infty} x_e[(k+\varepsilon)\Delta T)z^{-k}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Transformada de z completa

$$F(z,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty} f[(k+\varepsilon)\Delta T]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} f(k,\varepsilon)z^{-k}$$

Exemplo: função exponencial

$$f(k,\varepsilon)=e^{-\alpha(k+\varepsilon)},\alpha>0,\Delta T=1$$

$$F(z,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha(k+\varepsilon)}z^{-k}=e^{-\alpha\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k}z^{-k}=\frac{z}{z-e^{-\alpha}}e^{-\alpha\varepsilon}$$

$$\boxed{F(z,\varepsilon)=\frac{z}{z-e^{-\alpha}}e^{-\alpha\varepsilon}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Adição e Subtracção

$$F_1(z,\varepsilon)=Z[f_1(k,\varepsilon)]=\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k\Delta T,\varepsilon)z^{-k}$$

$$F_2(z,\varepsilon)=Z[f_2(k,\varepsilon)]=\sum_{k=0}^{\infty} f_2(k\Delta T,\varepsilon)z^{-k}$$

$$\boxed{Z[f_1(k,\varepsilon)\pm f_2(k,\varepsilon)]=F_1(z,\varepsilon)\pm F_2(z,\varepsilon)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Multiplicação por uma constante

$$F(z,\varepsilon) = Z[f(k,\varepsilon)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta T,\varepsilon) z^{-k}$$

$$a = \mathrm{constante}$$

$$\boxed{Z[af(k,\varepsilon)] = aF(z,\varepsilon)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

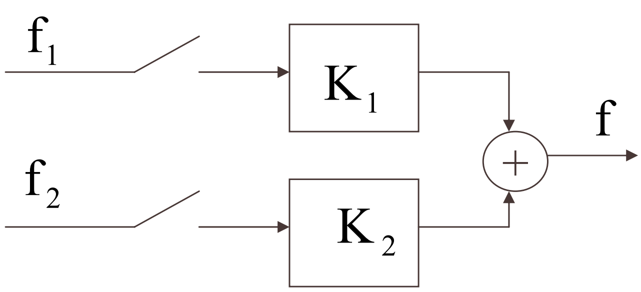
Linearidade

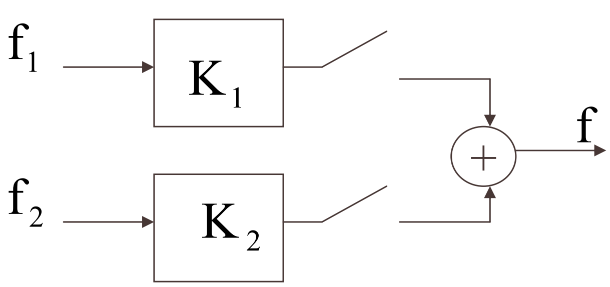
$$f_1(k,\varepsilon), f_2(k,\varepsilon) \Leftrightarrow F_1(k,\varepsilon), F_2(k,\varepsilon)$$

$$K_1, K_2 = \text{constantes}$$

$$Z[K_1 f_1(k,\varepsilon) + K_2 f_2(k,\varepsilon)] = K_1 F_1(z,\varepsilon) + K_2 F_2(z,\varepsilon)$$

Aplicação

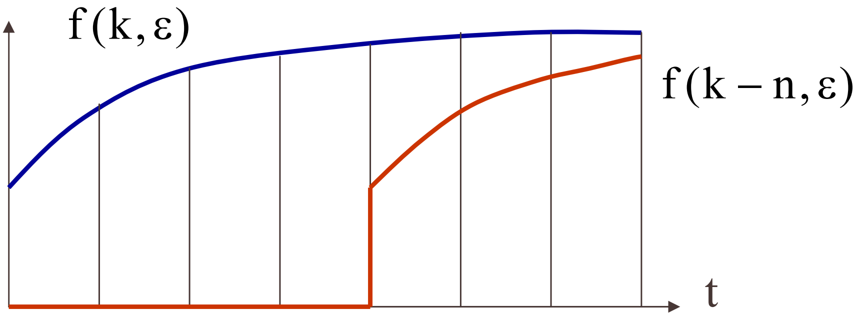




Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Teorema do deslocamento à direita



$$Z[f(k-n,\varepsilon)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n,\varepsilon) z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n,\varepsilon) z^{-(k-n)}$$

$$Z[f(k-n,\varepsilon)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m,\varepsilon) z^{-m} = z^{-n} Z[f(k,\varepsilon)]$$

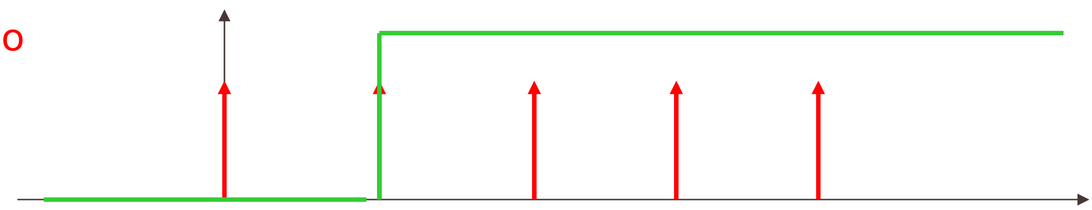
$$\boxed{Z[f(k-n,\varepsilon)] = z^{-n} Z[f(k,\varepsilon)]} \qquad \boxed{n > 0}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Teorema do deslocamento à direita

Aplicação



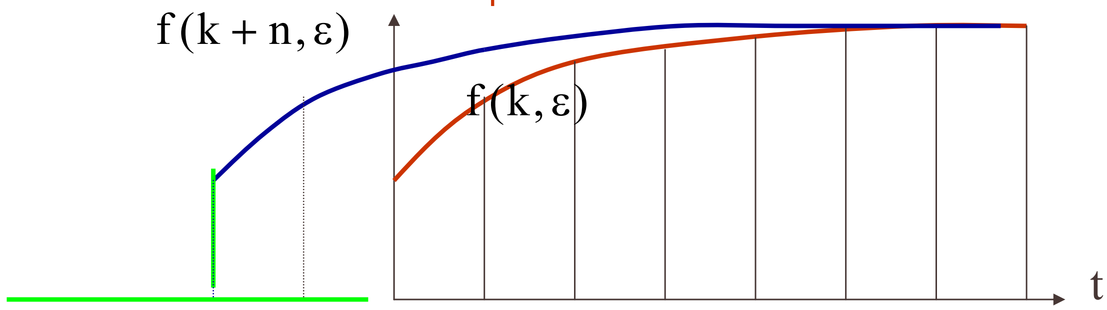
Função Degrau Unitário, atrasada de um período de amostragem

$$Z[u(t-\Delta T)] = z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{1}{z-1}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Propriedades

Teorema do deslocamento à esquerda



$$Z[f(k+n,\varepsilon)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n,\varepsilon) z^{-k} = z^{n} \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n,\varepsilon) z^{-(k+n)}$$

$$Z[f(k+n,\varepsilon)] = z^{n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m,\varepsilon) z^{-m} = z^{n} \left(Z[f(k,\varepsilon)] - \sum_{m=0}^{n-1} f(m,\varepsilon) z^{-m} \right)$$

$$\boxed{Z[f(k+n,\varepsilon)] = z^{n} \left(Z[f(k,\varepsilon)] - \sum_{m=0}^{n-1} f(m,\varepsilon) z^{-m} \right)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Translação complexa ou amortecimento

f(t) é multiplicada no domínio contínuo por Exp($-\alpha t$) e depois amostrada à taxa ΔT

Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s+\alpha)$$

$$e^{-(s+\alpha)\Delta T} = e^{-s\Delta T} e^{-\alpha \Delta T} = z^{-1} e^{-\alpha \Delta T}$$

$$\boxed{G(z) = Z[f(t)e^{-\alpha t}] = F(z e^{\alpha \Delta T})}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Translação complexa ou amortecimento

Aplicação

Determine a transformada z de $e^{-at}\sin(\omega t)$ amostrada à taxa ΔT sabendo que:

$$Z[\sin] = \frac{z\sin(\omega \Delta T)}{z^2 - 2z\cos(\omega \Delta T) + 1}, z \Rightarrow ze^{a\Delta T}$$

$$Z[e^{-at}\sin] = \frac{ze^{a\Delta T}\sin(\omega \Delta T)}{z^2 e^{2a\Delta T} - 2ze^{a\Delta T}\cos(\omega \Delta T) + 1}$$

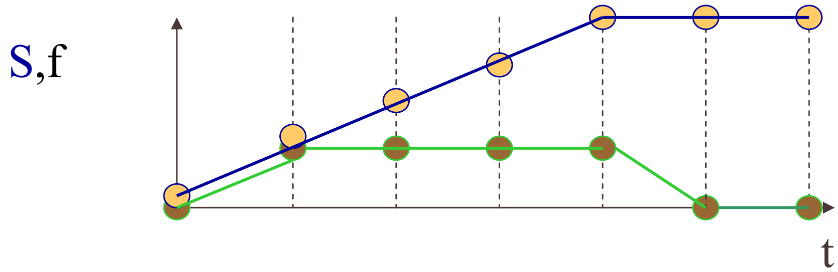
$$\boxed{Z[e^{-at}\sin] = \frac{ze^{-a\Delta T}\sin(\omega \Delta T)}{z^2 - 2ze^{-a\Delta T}\cos(\omega \Delta T) + e^{-2a\Delta T}}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Soma duma função

$$s(k,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{k} f(n,\varepsilon)$$



$$s(k,\varepsilon) = f(k,\varepsilon) + \sum_{n=0}^{k-1} f(n,\varepsilon) = f(k,\varepsilon) + f(k-1,\varepsilon)$$

$$S(k,\varepsilon) = F(k,\varepsilon) + z^{-1}S(k,\varepsilon)$$

$$\boxed{S(k,\varepsilon) = \frac{z}{z-1}F(k,\varepsilon)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Equação Diferença

$$\Delta f(k,\varepsilon) = f(k,\varepsilon) - f(k-1,\varepsilon)$$

$$Z[\Delta f(k,\varepsilon)] = F(z,\varepsilon) - z^{-1}F(z,\varepsilon)$$

$$Z[\Delta f(k,\varepsilon)] = (1 - z^{-1})F(z,\varepsilon)$$

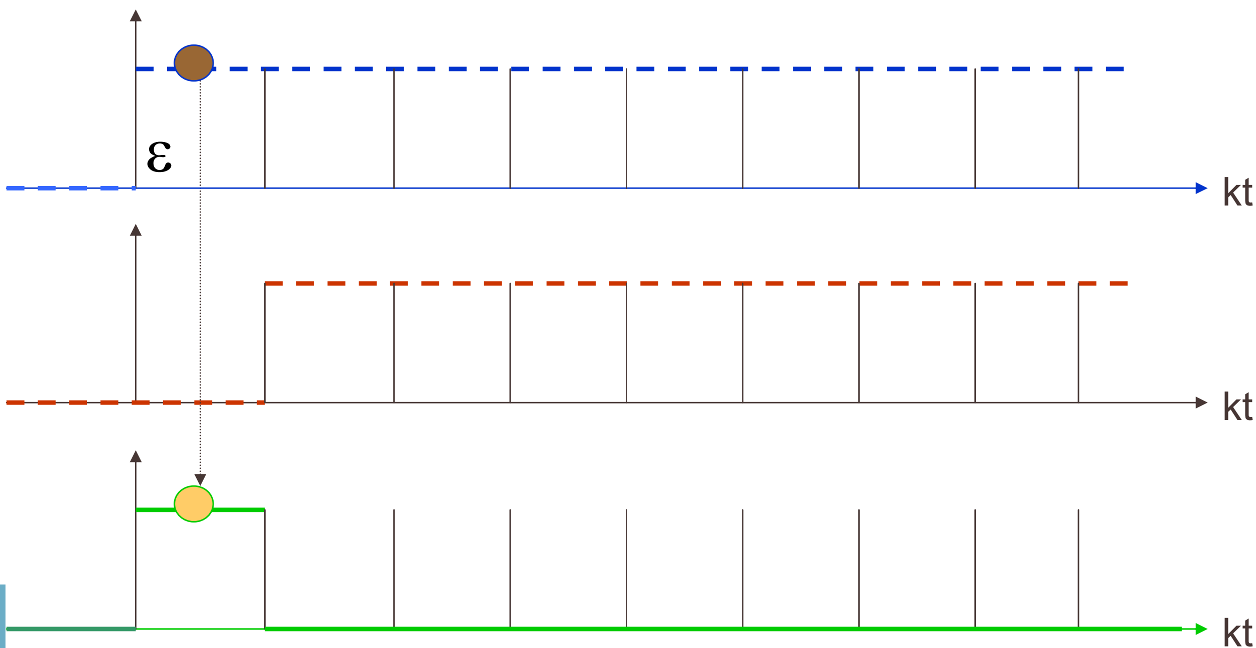
$$\boxed{Z[\Delta f(k,\varepsilon)] = \frac{z-1}{z}F(z,\varepsilon)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

$$\Delta f(k,\varepsilon) = f(k,\varepsilon) - f(k-1,\varepsilon)$$

Exemplo: Função Degrau

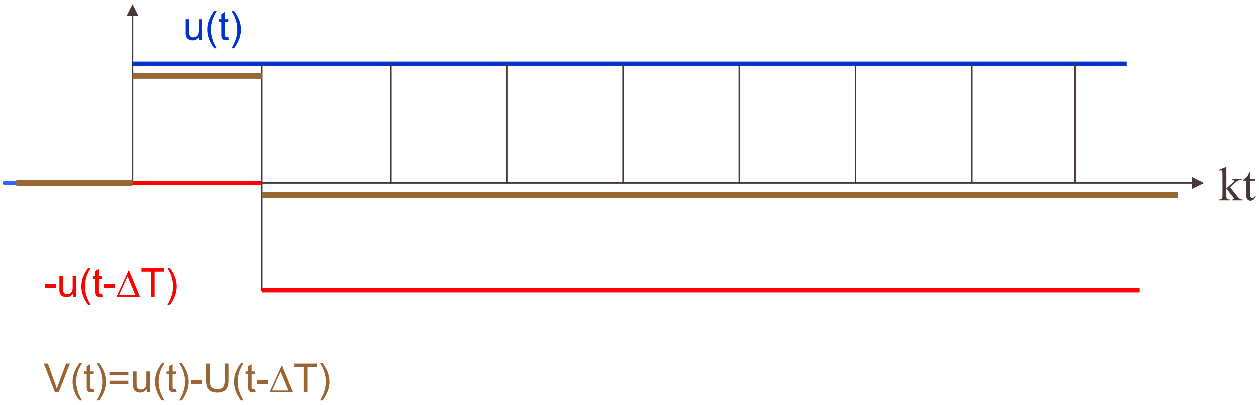


Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

$$Z[\Delta f(k,\varepsilon)] = Z[f(k,\varepsilon)] - Z[f(k-1,\varepsilon)] = F(z,\varepsilon)[1-z^{-1}]$$

$$\boxed{Z[\Delta f(k,\varepsilon)] = \frac{z-1}{z}F(z,\varepsilon)}$$



$$\boxed{V(z) = \frac{z-1}{z}\frac{z}{z-1} = 1}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Teorema do Valor Inicial

Se f(t) tem a transformada de z F(z) e se o lim F(z) quando $z \to \infty$ existe

$$F(z,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k,\varepsilon) z^{-k}$$

$$\boxed{\lim_{k \to 0} f(k,\varepsilon) = f(0,\varepsilon) = \lim_{z \to \infty} F(z,\varepsilon)}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(\Delta T) z^{-1} + f(2\Delta T) z^{-2}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Propriedades

Teorema do Valor Final

$$\lim_{k \to \infty} f(k,\varepsilon) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})F(z,\varepsilon) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} F(z,\varepsilon)$$

$$\lim_{k \to \infty} f(k,\varepsilon) = \lim_{z \to 1}(z-1)F(z,\varepsilon)$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL

Transformada de z – Propriedades

Teorema do Valor Final

Exemplo de Aplicação

$$F(z) = \frac{0.792\, z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416\, z + 0.208)}$$

Valor Inicial $$F(z \to \infty) = \frac{0.792\, z^2}{z^3} = 0$$

Valor Final $$f(k \to \infty) = \frac{0.792}{(1 - 0.416 + 0.208)} = 1$$

Expandindo F(z)

$$F(z) = 0.792z^{-1} + 1.12z^{-2} + 1.091z^{-3} + 1.01z^{-4} + 0.983z^{-5} + 0.989z^{-6} + 0.99z^{-7} \ldots.$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Departamento de Informática
www.estv.ipv.pt

Transformada de z – Inversa

$$
\begin{tikzcd}
f(k,\varepsilon) \arrow[rr, bend left, "\sum f(k,\varepsilon)z^{-k}"] & & F(z,\varepsilon) \arrow[ll, bend left, "?"]
\end{tikzcd}
$$

- Referência às tabelas
- Identificação Prática
- Métodos Analíticos
- Decomposição
- Inversão Numérica

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Identificação Prática

$$F(z) = \frac{z}{z-1}\,\frac{z}{z-e^{-\alpha}} = \frac{z}{z-1}G(z)$$

Soma duma função

Exponencial Discreta g(k)

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

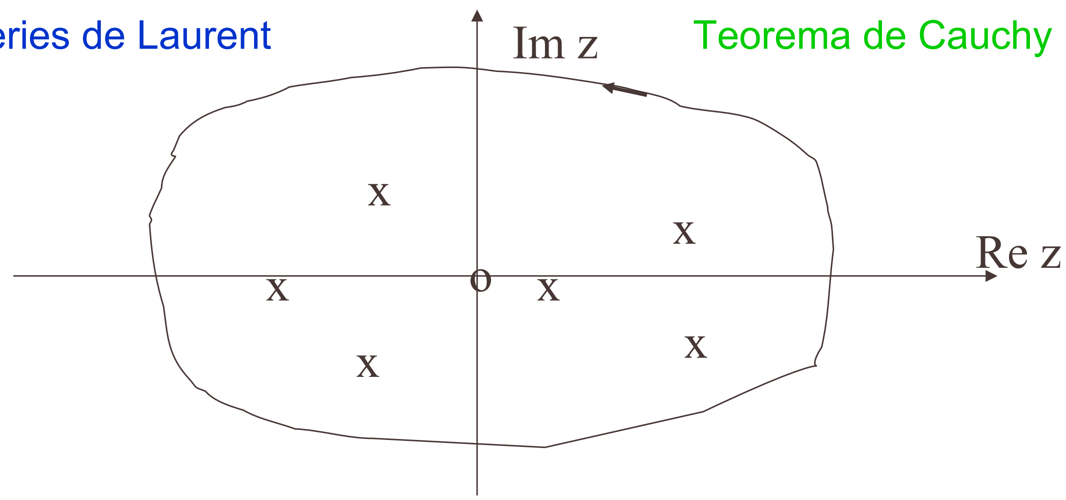
Transformada de z – Inversa

Método Analítico

$$F(z,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k,\varepsilon) z^{-k} \qquad f(k,\varepsilon) = \frac{1}{2j\pi}\oint F(z,\varepsilon) z^{k-1} dz$$

Series de Laurent

Teorema de Cauchy



Circundando todas singularidades de F(z,ε)

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Demonstração da fórmula de inversão.

$$X(z) = F\{x[n].r^{-n}\}$$

$$X\left(r.e^{j\Omega}\right) = F\{x[n].r^{-n}\}$$

$$x[n].r^{-n} = F^{-1}\left\{X\left(r.e^{j\Omega}\right)\right\}$$

$$x[n] = r^{n} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(r.e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n}.d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(r.e^{j\Omega}\right)\left(re^{j\Omega}\right)^{n}.d\Omega$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Demonstração da fórmula de inversão.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(r.e^{j\Omega}\right)\left(re^{j\Omega}\right)^n .d\Omega$$

Mudança de variáveis:

$$z = r.e^{j\Omega}$$

$$dz = jr.e^{j\Omega}.d\Omega$$

$$d\Omega = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{r.e^{j\Omega}} \cdot dz$$

Variando Ω de 0 a 2π $\rightarrow$ z varia sobre uma circunferência de raio r.
$|z|=r \in$ ROC de $X(z)$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z) \cdot \frac{z^n}{z} \cdot dz$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz}$$

Resolve-se utilizando o Teorema dos Resíduos

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Com a transformada de Laplace,

$$F(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{s+c} + \ldots. \qquad f(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + Ce^{-ct} \ldots.$$

Com a transformada de z, não é necessária a expansão. Basta, olhar para os termos:

$$\boxed{\frac{Az}{z - e^{-a\Delta T}} \Leftrightarrow Ae^{-ak\Delta T}}$$

A função F(z)/z é desenvolvida através da expansão em fracções parciais.

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Revisão:

Dado G(*v*) função racional em *v* com grau N(*v*) < grau D(*v*)

$$G(v) = \frac{N(v)}{D(v)}$$

Pode ser escrita na forma

$$G(v) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(v - p_i)^k}$$

Onde:

r = número de pólos

σ_i = multiplicidade do pólo *i*

A_{ik} = coeficiente relativo a k-*ésima* parcela do pólo *i*

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Onde:

$$A_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} \left\{ \frac{d^{\sigma_i - k}}{dv^{\sigma_i - k}} \left[(v - p_i)^{\sigma_i} . G(v) \right] \right\} \Bigg|_{v = p_i}$$

Exemplo 1:

$$H(s) = \frac{s^2 + 4}{(s+2)^2 (s^2 + 2s + 2)}$$

Pólos: duplos em *s*=-2 e complexo *s*=-1±j r=4 σ_1=2 σ_2=1 σ_3=1

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

$$H(s)=\frac{s^2+4}{(s+2)^2(s^2+2s+2)}=\frac{A}{(s+2)^2}+\frac{B}{s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+1}$$

$$A=\frac{1}{(2-2)!}\left\{\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left[(s+2)^2H(s)\right]\right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A=\frac{s^2+4}{s^2+2s+2}\Bigg|_{s=-2}=\frac{8}{2}=4$$

$$B=\frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left[(s+2)^2H(s)\right]\right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$B=\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+4}{s^2+2s+2}\right)\Bigg|_{s=-2}=\frac{2s^2-4s-8}{s^4+4s^3+8s^2+8s+4}\Bigg|_{s=-2}=2$$

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Pólo complexo: $$\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}=\frac{A'}{s+R-jI}+\frac{B'}{s+R+jI}$$

$$Cs+D=(A'+B')s+A'(R+jI)+B'(R-jI)$$

No caso: $$A'=\frac{1}{(1-1)!}\left\{\frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}}\left[(s+1-j)H(s)\right]\right\}\Bigg|_{s=-1+j}$$

$$A'=\frac{s^2+4}{(s+2)^2(s+1+j)}\Bigg|_{s=-1+j}=\frac{4-2j}{-4}=1+0.5j$$

$$B'=\frac{1}{(1-1)!}\left\{\frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}}\left[(s+1+j)H(s)\right]\right\}\Bigg|_{s=-1-j}$$

$$B'=\frac{s^2+4}{(s+2)^2(s+1-j)}\Bigg|_{s=-1-j}=\frac{4+2j}{-4}=1-0.5j$$

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Para funções com coeficientes reais: sempre B'=A'*

Logo:
$$C = 2.\mathrm{Re}\{A'\}$$
$$D = -2\left[\mathrm{Re}\{p\}.\mathrm{Re}\{A'\} + \mathrm{Im}\{p\}.\mathrm{Im}\{A'\}\right]$$

Assim:
$$C = 2.(-1) = -2$$
$$D = -2\left[(-1)(-1) + (0.5)(1)\right] = -3$$
$$H(s) = \frac{s^2+4}{(s+2)^2(s^2+2s+2)} = \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} + \frac{-2s-3}{s^2+2s+1}$$

Matlab: função `residue`

```
[r,p,k]=residue(n,d)
```

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

No caso específico da Transformada *Z*

Como as funções básicas são na forma: $\dfrac{z}{z-a}$

A expansão em fracções parciais não pode ser aplicada directamente na X(z).

Soluções:

1) Aplicar o método na função: $\dfrac{X(z)}{z}$

2) Aplicar o método na função: $X\left(z^{-1}\right)$

Matlab: função `residuez`

```
[r,p,k]=residuez(n,d)
```

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Exemplo 1:

$$X(z)=\frac{3z^2-\frac{5}{6}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

Método 1:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{3z-\frac{5}{6}}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A}{z-\frac{1}{4}}+\frac{B}{z-\frac{1}{3}}$$

$$A=\frac{3z-\frac{5}{6}}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\cdot\left(z-\frac{1}{4}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=1 \quad B=\frac{3z-\frac{5}{6}}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{3}}=2$$

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL
2003-2004

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Logo:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z-\frac{1}{4}}+\frac{2}{z-\frac{1}{3}}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{2z}{z-\frac{1}{3}}$$

Por tabela temos:

$$x[n]=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

Método 2: $$X(z) = \frac{3z^2 - \frac{5}{6}z}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\right|_{z=\frac{1}{4}} = 1$$

$$B = \left.\frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\right|_{z=\frac{1}{3}} = 2$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

2003-2004

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL

Transformada de z – Inversa

Expansão em fracções parciais

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Por tabela temos:

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Departamento de Informática
www.estv.ipv.pt

Transformada de z – Inversa

Método da Série de Potências

$$F(z) = f(0) + f(\Delta T)z^{-1} + f(2\Delta T)z^{-2} + f(3\Delta T)z^{-3} + \ldots$$

Os coeficientes da expansão em série, representam os valores de f(t) (normalmente uma série de valores numéricos)

$$F(z) = \frac{(1-e^{-a\Delta T})z}{(z-1)(z-e^{-a\Delta T})} = \frac{(1-e^{-a\Delta T})z}{z^2-(1+e^{-a\Delta T})z+e^{-a\Delta T}}$$

$$F(z) = (1-e^{-a\Delta T})z^{-1} + (1-e^{-2a\Delta T})z^{-2} + \ldots.$$

$$\boxed{f'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-ak\Delta T})\delta(t-k\Delta T)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Inversa

Método da Série de Potências

Definição da Transformada Z → Série de Laurent

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

$$X(z) = \ldots + x[-2].z^{2} + x[-1].z + x[0] + x[1].z^{-1} + x[2].z^{-2} + \ldots$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Inversa

Método da Série de Potências

Exemplo 1: $X(z) = \dfrac{z}{z+0.5}$

Sabemos por tabela: $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

Isto é:

$$\begin{array}{ccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ x[n] & 1 & -0.5 & 0.25 & -0.125 & 0.0625 & \ldots. \end{array}$$

Podemos calcular a série de potência de uma razão de polinómios por divisões sucessivas:

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Método da Série de Potências

$$\begin{array}{l|l} z & z+0.5 \\ \underline{-z-0.5} & 1-0.5z^{-1}+0.25z^{-2}-0.125z^{-3}+\ldots. \\ \quad -0.5 & \\ \quad \underline{0.5+0.25z^{-1}} & \\ \qquad 0.25z^{-1} & \\ \qquad \underline{-0.25z^{-1}-0.125z^{-2}} & \\ \qquad\quad -0.125z^{-2} & \\ \qquad\quad \underline{0.125z^{-2}+0.0625z^{-3}} & \\ \qquad\qquad \ldots. & \end{array}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Inversa

Método da Série de Potências

Exemplo 2: $X(z) = z^2\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$

Pólos somente em z=0, fracções parciais não é apropriado.

Multiplicando todos os termos:

$$X(z) = z^2 - \tfrac{1}{2}z - 1 + \tfrac{1}{2}z^{-1}$$

De tabela temos:

$$x[n] = \delta[n+2] - \tfrac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1]$$

Exemplo 3: $X(z) = \log\left(1+az^{-1}\right), \quad |z| > |a|$

Transformada de z – Pares de Transformadas de z

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	$Todo \;\; Plano \;\; Z$
$u[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| < 1$
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$Todo \; Plano \; Z \, exceto:$ $z=0 \;\; p/\;\; n_0>0$ $z=\infty \;\; p/\;\; n_0<0$
$a^n u[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$

Transformada de z – Pares de Transformadas de z

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$n.a^n u[n]$	$\dfrac{a.z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n^2.a^n u[n]$	$\dfrac{a.z.(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$(n+1).a^n u[n]$	$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos(\Omega_0 n).u[n]$	$\dfrac{z[z-\cos(\Omega_0)]}{z^2-2\cos(\Omega_0).z+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\Omega_0 n).u[n]$	$\dfrac{z\sin(\Omega_0)}{z^2-2\cos(\Omega_0).z+1}$	$\lvert z\rvert > 1$

Transformada de z – Pares de Transformadas de z

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$r^n \cos(\Omega_0 n).u[n]$	$\dfrac{z[z-r.\cos(\Omega_0)]}{z^2-2r\cos(\Omega_0).z+r^2}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n \sin(\Omega_0 n).u[n]$	$\dfrac{z.r.\sin(\Omega_0)}{z^2-2r\cos(\Omega_0).z+r^2}$	$\lvert z\rvert > r$
$\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1 \\ 0, & outros \end{cases}$	$\dfrac{z^N-a^N}{z^{N-1}(z-a)}$	$\lvert z\rvert > 0$

Transformada de z – Propriedades

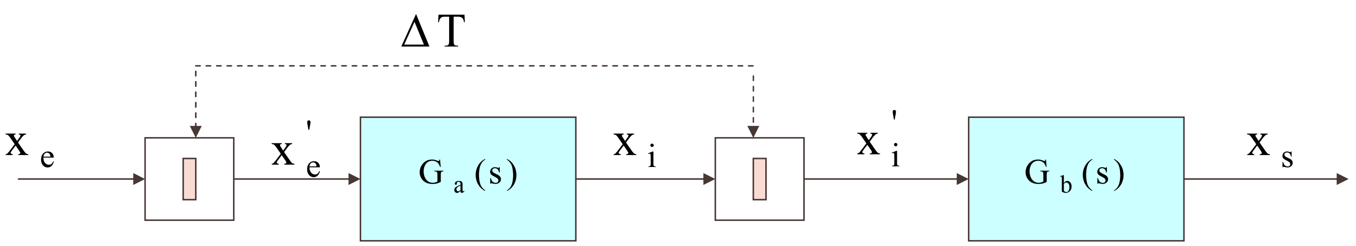
TABLE 3.2 SOME *z*-TRANSFORM PROPERTIES

Property Number	Section Reference	Sequence	Transform	ROC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contains $R_{x_1}\cap R_{x_2}$
2	3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\lvert z_0\rvert R_x$
4	3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6		$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contains R_x
7		$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contains R_x
8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9	3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1}\cap R_{x_2}$
10	3.4.8	Initial-value theorem: $x[n]=0,\quad n<0 \qquad \lim_{z\to\infty} X(z)=x[0]$		

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas contínuos em série com um amostrador ideal, em cada entrada



$$X_i(z,\varepsilon) = G_a(z,\varepsilon)X'_e(z)$$

$$X'_i(z) = X_i(z,0) = G_a(z,0)X'_e(z)$$

$$X_s(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon)X'_i(z)$$

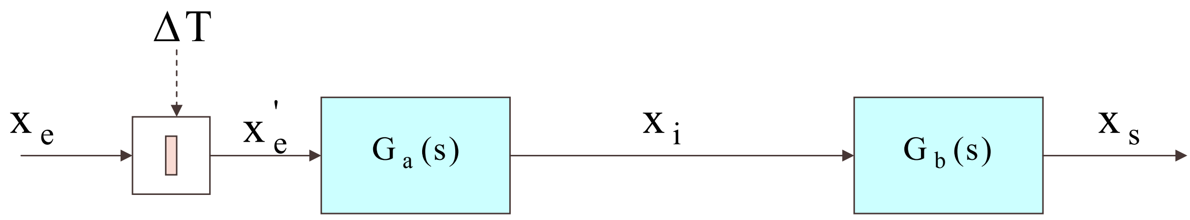
$$X_s(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon)G_a(z,0)X'_e(z) = G(z,\varepsilon)X'_e$$

$$\boxed{G(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon)G_a(z,0)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas contínuos em série com um amostrador ideal na primeira entrada



$$G(s) = G_a(s)G_b(s)$$

$$\boxed{X_s(z,\varepsilon) = G(z,\varepsilon)X'_e(z)}$$

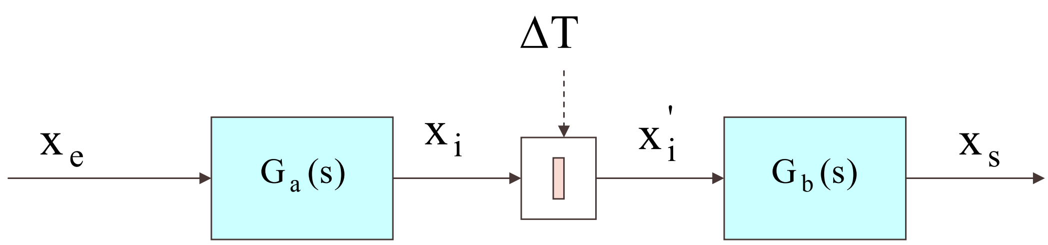
$$G(z,\varepsilon) = Z[G(s)] = Z[G_a(s)G_b(s)]$$

Em geral $\boxed{G(z,\varepsilon) \neq G_a(z,\varepsilon)G_b(z,\varepsilon)}$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas contínuos em série com um amostrador ideal na segunda entrada



$$X_s(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon)X'_i(z) \qquad X'_i(z) = X'_i(z,0)$$

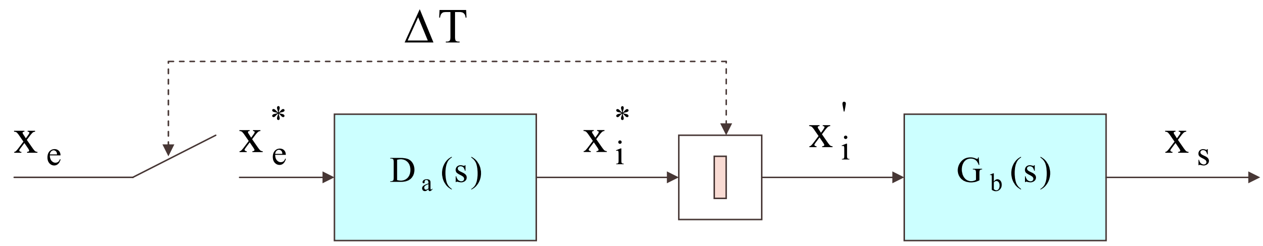
$$X_i(s) = G_a(s)X_e(s)$$

$X_s(z,\varepsilon)$ dado por $G_b(z,\varepsilon)$ e por $\boxed{Z[G_a(s)X_e(s)]}$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas Discretos e Contínuos em série com um amostrador ideal



$$X_i^*(z) = D_a(z) X_e^*(z)$$

$$X_s(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon) X_i'(z)$$

$$X_i'(z) = X_i^*(z)$$

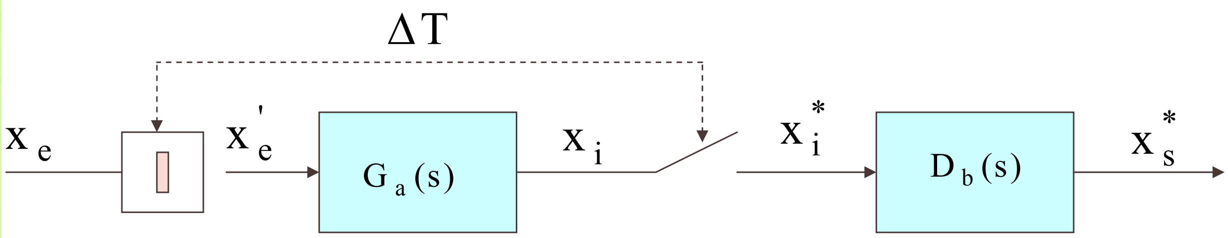
$$X_s(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon) D_a(z) X_e^*(z) = G(z,\varepsilon) X_e^*(z)$$

$$\boxed{G(z,\varepsilon) = G_b(z,\varepsilon) D_a(z)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas Contínuos e Discretos em série com um amostrador ideal



$$X_i(z,\varepsilon) = G_a(z,\varepsilon) X_e'(z)$$

$$X_i^*(z) = X_i(z,0)$$

$$X_s^*(z) = D_b(z) X_i^*(z)$$

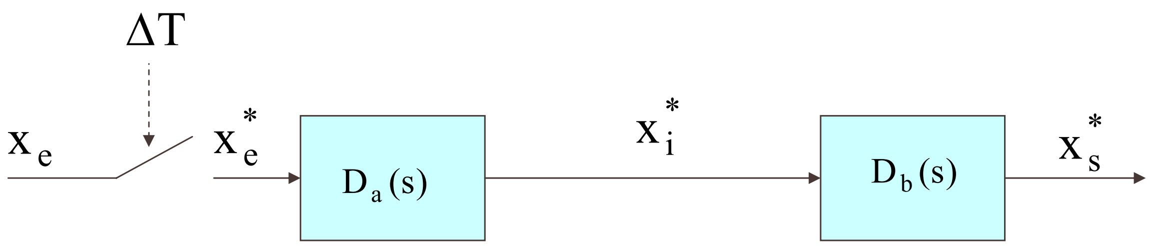
$$X_s^*(z) = D_b(z) G_a(z,0) X_e'(z) = G^*(z) X_e'(z)$$

$$\boxed{G^*(z) = D_b(z) G_a(z,0)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas Discretos em Série com um amostrador ideal



$$X_i^*(z) = D_a(z) X_e^*(z)$$

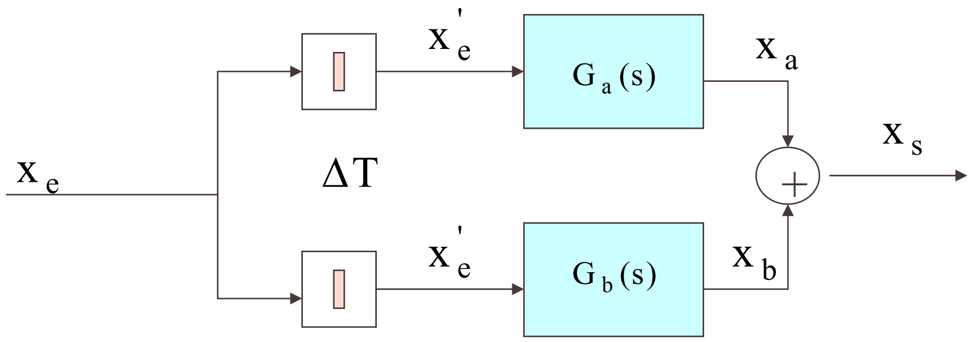
$$X_s^*(z) = D_b(z) D_a(z) X_e^*(z) = D(z) X_e^*(z)$$

$$\boxed{D(z) = D_b(z) D_a(z)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas Contínuos em Paralelo com um amostrador ideal



$$X_s(z,\varepsilon) = X_a(z,\varepsilon) + X_b(z,\varepsilon)$$

$$X_s(z,\varepsilon) = G_a(z,\varepsilon) X'_e(z) + G_b(z,\varepsilon) X'_e(z)$$

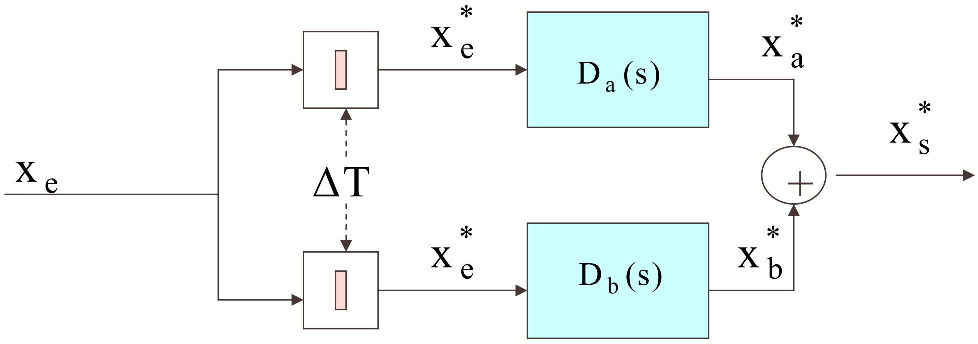
$$X_s(z,\varepsilon) = [G_a(z,\varepsilon) + G_b(z,\varepsilon)] X'_e(z) = G(z,\varepsilon) X'_e(z)$$

$$\boxed{G(z,\varepsilon) = G_a(z,\varepsilon) + G_b(z,\varepsilon)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Sistemas Discretos em paralelo com um amostrador ideal



$$X_s^*(z) = X_a^*(z) + X_b^*(z)$$

$$X_s^*(z) = D_a(z)X_e^*(z) + D_b(z)X_e^*(z)$$

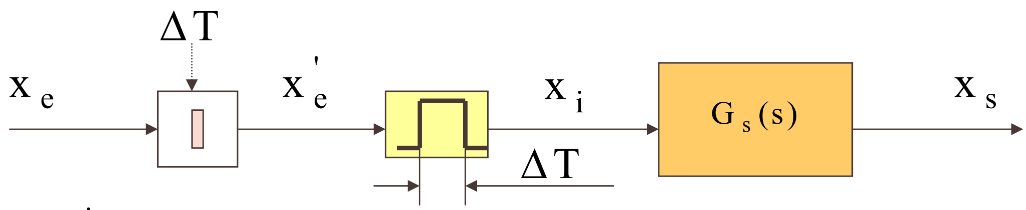
$$X_s^*(z) = [D_a(z) + D_b(z)]X_e^*(z) = D(z)X_e^*(z)$$

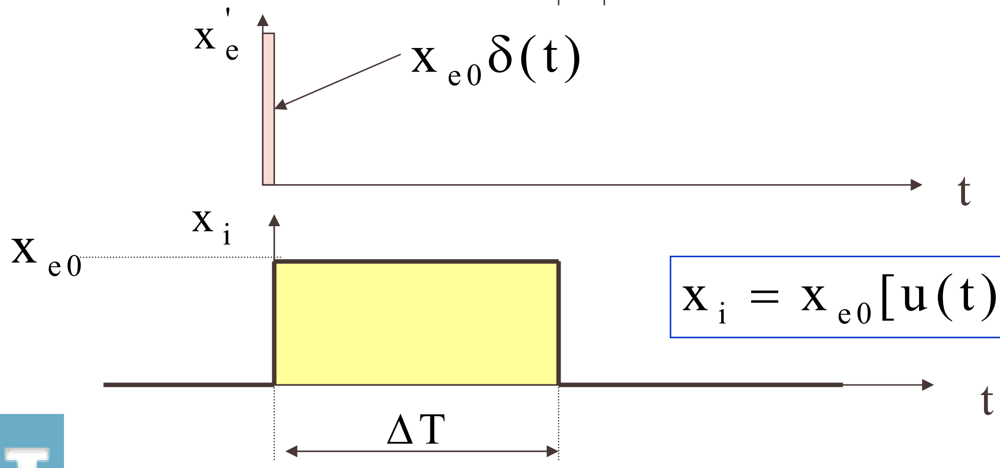
$$\boxed{D(z) = D_a(z) + D_b(z)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Estabilidade

Sistemas Contínuos em série com um zero-order hold
Função de Transferência, através da resposta impulsional





$$\boxed{x_i = x_{e0}[u(t) - u(t - \Delta T)]}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Transformada de Laplace

$$x_i = x_{e0}[u(t) - u(t - \Delta T)]$$

$$X_i(s) = x_{e0}[\frac{1}{s} - \frac{e^{-s\Delta T}}{s}] = x_{e0}(\frac{1 - e^{-s\Delta T}}{s})$$

$$\boxed{G_m(s) = \frac{X_i(s)}{X_e(s)} = \frac{1 - e^{-s\Delta T}}{s}}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

SISTEMAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL
2003-2004

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Função de Transferência Global

$$G(s) = \frac{X_s(s)}{X_e(s)} = \frac{1 - e^{-s\Delta T}}{s} G_s(s) = (1 - e^{-s\Delta T})\frac{G_s(s)}{s}$$

$$\boxed{G_I(s) = \frac{G_s(s)}{s}}$$

Igual a G(s) com um integrador

Transformada de z de G(s)

$$G(s) = G_I(s) - e^{-s\Delta T} G_I(s)$$

$$G_I(s) \rightarrow G_I(z, \varepsilon)$$

$$e^{-s\Delta T} G_I(s) \rightarrow z^{-1} G_I(z, \varepsilon)$$

$$\boxed{G(z, \varepsilon) = (1 - z^{-1}) G_I(z, \varepsilon) = \frac{z - 1}{z} G_I(z, \varepsilon)}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso
Departamento de Informática

Transformada de z – Aplicação a Sistemas

Consequências no comportamento

$$G_s(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - p_i}$$

$$G_I(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s(s - p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(-p_i)}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s - p_i}\right]$$

Transformada de z $\quad \frac{1}{s} \rightarrow \frac{z}{z-1} \qquad \frac{1}{s - p_i} \rightarrow \frac{z}{z - e^{p_i t}} e^{\varepsilon p_i t}$

$$G(z,\varepsilon) = \frac{z-1}{z} G_I(z,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(-p_i)}\left[1 - \frac{z-1}{z - e^{p_i t}} e^{\varepsilon p_i t}\right]$$

Existem n pólos de G(z,ε), que dependem dos n pólos da função de transferência do sistema contínuo.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso